アメリカン・オプション最小二乗モンテカルロ法の精度評価

Accuracy Evaluation of the Least Squares Monte Carlo Method for Pricing High-Dimensional American Options

岡 野 豊 明

要 約 アメリカン・オプションの価格付けは，オプション価格理論における最も難解な問題の一つである．アメリカン・オプションは，株式，債券，通貨等の主要金融市場において取引されていると同時に，近年では不動産や電力/エネルギーの分野においても利用されている．また，その理論はリアル・オプションとして投資やプロジェクトの評価にも用いられている．

理論解がないので，アメリカン・オプションの価格付けには二項モデルや偏微分方程式の差分解法などの数値計算手法が用いられてきたが，これらの手法は状態変数の数が多くなると計算負荷が指数関数的に増加するため，最近重要性を増している多次元問題には不向きである．一方，モンテカルロ・シミュレーションはパスを前進的に発生させて評価するため，満期におけるペイオフから出発して後退的に評価を行うアメリカン・オプションにはなじまないとされてきたが，Tilley[15]の論文以来，現在ではアメリカン・オプションの評価にもモンテカルロ・シミュレーションが用いられるようになっている．モンテカルロ・シミュレーションの収束性は次元の数にはよらず，パス数のみに依存するという点がその大きな理由である．

本稿は，最近 Longstaff-Schwartz[10]によって開発されたアメリカン・オプションに対する最小二乗モンテカルロ法をとりあげ，その精度評価を行うものである．最小二乗モンテカルロ法は，アメリカン・オプションの続行価値を表す条件付期待値を最小二乗法による回帰によって推定するが，基底関数としてどのような関数を選べばよいか，またその個数をいくつにすればよいかについて不確定性が存在する．そこで，これらに関する知見を得るため，精度評価に際しては，ボラティリティーや相関係数が資産によらず一定でペイオフ関数が対称的な問題を扱い，最小二乗法回帰の基底関数として対称多項式を用いる．また，回帰領域の分割の効果，回帰の説明変数として低次元の縮約情報を用いた場合の精度について検討を行う．最小二乗モンテカルロ法は基底関数を適切に選択すれば非常に精度がよいが，シミュレーションの過程で行列演算を用いるので，他の手法に比べて計算時間がかかるのが欠点である．この欠点を克服するための計算時間の短縮方法についても最後に考察を行う．

Abstract One of most difficult problems in option pricing theory is the valuation and optimal exercise of high-dimensional American options. These types of options are found recently in the real estate and energy markets as well as in major financial markets such as the equity, commodity, and foreign exchange markets.

Because closed-form expressions for the prices of American-style securities are rare, the binomial and finite difference techniques have been used for pricing American options, but these techniques become impractical in situations where there are multiple state variables due to the exponential growth of computational resources.

Tilley (1993) represents early attempt to extend the applicability of Monte Carlo simulation to the pricing of American securities. Since then simulation methods have been applied to the American option pricing, because the convergence rate of Monte Carlo simulation is typically independent of the problem dimension.

Recently, Longstaff and Schwartz (2001) proposed a simple simulation method for the computation of American option prices. Their algorithm computes the conditional expectations expressing the continuation value of the option by Monte Carlo simulation and least squares regression. Their method involves some uncertainties as to the choice of basis functions and the number of terms. To make clear these issues, we investigate the accuracy of the method using symmetric polynomials for the constant volatility and symmetric payoff problems. The effect of partitioning regression region and several methods to improve the computational efficiency such as dimensionality reduction are also considered.

1. はじめに

オプション価格理論における最も重要な問題の一つにアメリカン・タイプのデリバティブの価格付けと最適行使時点の評価がある．このタイプのデリバティブは，株式，債券，通貨等の主要金融市場において取引されていると同時に，最近では不動産や電力/エネルギー関連の分野においても利用されている．また，その理論はリアル・オプションとして投資やプロジェクトの評価などにも用いられている．更に，これらのデリバティブはますます複雑化しており，ペイオフが多くの資産や状態変数に依存するようになってきている．理論解がないので，アメリカン・オプションの価格付けには二項モデルや偏微分方程式の差分解法などの数値計算手法が用いられてきたが，これらは状態変数の数が多くなると計算負荷が指数関数的に増えるため，多次元問題には不向きである．一方，モンテカルロ・シミュレーションの収束性は次元の数にはよらないため，現在ではアメリカン・オプションの評価にもモンテカルロ・シミュレーションが用いられるようになってきている．

本稿では，最近 Longstaff-Schwartz[10]によって開発されたアメリカン・オプションに対する最小二乗モンテカルロ法（Least-Squares Monte Carlo Method）をとりあげ，その精度評価を行う．最小二乗モンテカルロ法は，アメリカン・オプションの続行価値を最小二乗法による回帰によって推定する．他文献との比較のため，精度評価に際しては，ボラティリティーや相関係数が資産によらず一定でペイオフ関数が対称的な問題を扱い，最小二乗法回帰の基底関数として対称多項式を用いる．また，回帰領域分割の効果，回帰の説明変数として低次元の縮約情報を用いた場合の精度および計算時間の短縮方法についても考察を行い，最後に，結論および今後の課題について述べる．

2. 最小二乗モンテカルロ法

アメリカン・オプションの評価は，満期 T までの時間を M 等分し，各時間 t_k ($0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T$) におけるオプションの本質的価値 $I(t_k)$（オプションを行使したときに得られるペイオフ）と続行価値 F_k（オプションを保持し続ける場合の価値）の大小を比較して行う．$I(t_k)$ が $F(t_k)$ より大きい場合にはオプションを行使し，逆の場合には保持を続ける．計算は，通常のダイナミックプログラミング・アプローチと同様に，満期におけるペイオフから出発して後退的に行われ，時間ステップ数 M を十分大きくとることにより，オプション価格の近似値が得られる．

```
for( n = 1; n <= NPATH; n++)
  cash_flow[n] = payoff( stock[n][tmax], pexe);  /* 満期ペイオフの計算  */
for( t = tmax-1; t > 0; t--) {
  for( n = 1; n <= NPATH; n++) {
    cash_flow[n] = *discount;  /* 1 期ディスカウント */
    basis_func( stock[n][t], func_value);  /* 基底関数の計算  個数 ORDER */
    for( k = 1; k <= ORDER; k++) {
      matrix[n][k] = func_value[k];        /* 説明変数行列への代入 */
      save[n][t] = func_value[k];          /* 続行価値計算のための値保存 */
    }
    matrix[n][ORDER+1] = cash_flow[n];  /* 目的変数の代入  */
  }
  householder( matrix, reg_coef, NPATH, ORDER+1);  /* 回帰係数計算（後述）*/
  for( n = 1; n <= NPATH; n++) {
    if( ( exerval = payoff( stock[n][t], pexe) ) > 0 ) {
      contval = 0;
      for( k = 1; k <= ORDER; k++)  contval += reg_coef[k]*save[n][k];  /* 続行価値 */
      if( exerval > contval )  cash_flow[n] = exerval;  /*行使価値＞続行価値のとき更新*/
    }
  }
}
average = 時間 0 における discounted cash_flow の全パスに関する平均値;
price = max( average, exerval at t = 0);  /* 上記平均値と時間 0 の行使価値の大小を比較し
                                             てオプション価格を求める */
```

図 1　最小二乗モンテカルロ法の計算アルゴリズム

オプションの続行価値 $F(t_k)$ は以下の式によって定義される．

$$F(t_k) = E_Q\left[\sum_{j=k+1}^{M} \exp\left(-\int_{t_k}^{t_j} r(s)\,ds\right) C(t_j;t_k,T) \mid \Im_{t_k}\right] \tag{1}$$

ここで，E_Q はリスク中立確率による期待値，$r(t)$ は無リスク金利，$\Im_{t_k}$ は時間 t_k までの原資産の価格情報であり，$C(t_j;t_k,T)$ は，時間 t_k までにオプションを行使しなかったという条件のもとで，オプション保持者が最適行使戦略に従った場合の，時間 $t_j\,(t_k < t_j)$ におけるオプションのキャッシュフローである．

最小二乗モンテカルロ法においては，モンテカルロ・シミュレーションのパスから生成されるキャッシュフロー情報を原資産の価格情報に最小二乗法を用いて回帰して，(1)式の条件付期待値を計算する．このように，オプションを行使した場合のキャッシュフローの条件付期待値を用いているため，最小二乗モンテカルロ法による推定は負のバイアスをもち（low estimator），基底関数の個数を増やすにつれて真の値に収束することが，Longstaff-Schwartz[10]において理論的に示されている．

図 1 に，最小二乗モンテカルロ法の計算アルゴリズムを C プログラムの形式で示した．こ

のように計算アルゴリズム自体は非常に簡単で，短い行数のプログラムで記述することができる．

3. 基底関数と最適回帰次数の選択

(1)式の条件付期待値を最小二乗法によって回帰して求めるには，適切な基底関数を選択しなければならない．Longstaff–Schwartz[10]においては，Laguerre, Hermite, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer, Jacobi などの直交多項式を推奨しているが，1 次元問題を除いて基底関数の選択法や必要な基底関数の個数に関して明確な指針がない．また，Moreno–Navas[12]において，最小二乗モンテカルロ法は多次元問題については基底の選択に関してあまりロバストではないという報告もなされている．このように，最小二乗モンテカルロ法においては，基底関数の選択やその個数に関して試行錯誤的に決定しなければならない面が残されており，これらに関して知見を得るため，最も簡単な多項式関数を基底として用いた精度評価計算を行う．

3.1 対称多項式

単項多項式[*1]を基底関数として用いると，基底関数の個数が非常に多くなる．次元が n の場合，d 次以下の単項多項式の個数は，

$$\binom{n+d}{d}=\frac{(n+d)!}{n!d!}$$

であり，$n=5, d=3$ の場合ですでに単項多項式の個数は 56 個となる．これでは回帰計算の計算負荷が非常に大きくなるので，精度評価計算の対象を，対称多項式[*2]を基底としてとることのできる問題に限定することとする．対称多項式を基底とすることにより，基底関数の個数を大幅に減らすことができる．表 1 は，2，5，10 次元における 7 次までの対称多項式の個数を示している．

表 1 からわかるように，5 次元の場合，3 次以下の対称多項式の数は 7 個であり，単項多項式の数 56 の 8 分の 1 である．なお，2 次元の場合には単項多項式を用いても基底関数の数はそれほど増えないので，2 次元問題に関しては単項多項式を基底関数とする計算も行う．

対称多項式を基底関数としてとることができるのは，原資産のボラティリティー，配当率，相関係数等が資産によらず一定値であり，ペイオフ関数が対称関数になるような場合である．このような場合においては，早期行使境界は初期値によらず対称関数となると考えられる．対称な計算問題は文献[5][6][7][8][10][14]に多数とりあげられており評価対象は豊富である．

表 1　対称多項式の個数

次元	1 次以下	2 次以下	3 次以下	4 次以下	5 次以下	6 次以下	7 次以下
2	2	4	6	9	12	16	20
5	2	4	7	12	19	29	42
10	2	4	7	12	19	30	45

3.2 AIC による最適次数の選択

多項式回帰の問題点として，高次多項式を用いるとオーバーフィッティングして精度が悪くなることがあげられる．モンテカルロ・シミュレーションにおいては，時間ステップが小さいところでは，原資産価格のパスは初期値の付近に密集しているので，このような時点で高次多

項式を用いるのは得策ではない．また，初期価格がITM（in the money：オプションのペイオフが正の状態），ATM（at the money：ペイオフが0の状態）およびOTM（out of the money：ペイオフが実質的に負となってオプションを行使しない状態）によって最適回帰次数が異なることも考えられる．そこで，時系列解析などでよく用いられているAICが最小となる次数を選択する機能を最小二乗モンテカルロ法の回帰計算に付加する．以下，この機能の説明を行う（北川[1]，坂元，石黒，北川[2]参照）．

$y=Xa+\varepsilon$（X は説明変数行列，a は回帰係数ベクトル，ε は残差ベクトル）と表される m 次の回帰モデルの $N\times m$ 行列 X の右側に目的変数ベクトル y を付加して $N\times(m+1)$ 行列 $Z=\left[X\,|\,y\right]$ を作る．この行列 Z に適当なハウスホルダー変換（鏡映変換に基づく直交変換）U を施すと次のような上三角行列 S に変形することができる．

$$S=UZ=\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} & S_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & S_{mm} & S_{m,m+1} \\ & & & S_{m+1,m+1} \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

このとき，S の1〜m 列は UX に対応し，$m+1$ 列は Uy に対応するので，

$$\|Uy-UXa\|^2=\left\|\begin{bmatrix} S_{1,m+1} \\ \vdots \\ S_{m,m+1} \\ S_{m+1,m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & S_{mm} \\ & \mathrm{O} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\right\|^2$$

$$=\left\|\begin{bmatrix} S_{1,m+1} \\ \vdots \\ S_{m,m+1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & & S_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\right\|^2+S_{m+1,m+1}^2$$

が成り立つ．ここで，最後の式の右辺第2項 $S_{m+1,m+1}^2$ は a と無関係な定数であるから，$\|Uy-UXa\|^2$ を最小とするためには右辺第1項を0とした一次方程式

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & & S_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_{1,m+1} \\ \vdots \\ S_{m,m+1} \end{bmatrix}$$

を解けばよい．上記の連立一次方程式は左辺の行列が上三角形なので後退代入により容易に解を求めることができる．また，$S_{m+1,m+1}^2$ が残差ベクトルの長さの2乗となるので m 次の回帰モデルの残差分散 σ^2 の推定値は次式となる．

$$\hat{\sigma}_m^2=\frac{S_{m+1,m+1}^2}{N}$$

上式を用いると，m 次の回帰モデルのAICは，

$$\mathrm{AIC}_m=N\left(\log 2\pi\hat{\sigma}_m^2+1\right)+2(m+1)$$

で与えられる．上三角行列(2)が計算されると m 次の回帰モデルだけでなく，それ以下の次数の回帰モデルをすべて求めることができる．すなわち，$x_{n1},\cdots,x_{nk}\,(k\le m)$ を説明変数とする

k 次の回帰モデル

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} x_{ni} a_i + \varepsilon_n$$

の残差分散の推定値および AIC は

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^{m+1} S_{i,m+1}^2 \tag{3}$$

$$\mathrm{AIC}_k = N\left(\log 2\pi\hat{\sigma}_k^2 + 1\right) + 2(k+1)$$

と表される．また，回帰係数を推定するためには連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & & S_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,m+1} \\ \vdots \\ S_{k,m+1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

を後退代入によって解けばよい．

AIC を用いて最適次数の選択を行うためには，$\mathrm{AIC}_0,\cdots,\mathrm{AIC}_m$ を(3)の AIC_k 式によって計算し，最小の値をとる次数をさがす．いったん上三角行列 S が求められると，回帰係数の推定を行うまでもなく，(3)式によってすべての次数の回帰モデルの AIC がただちに計算できる．従って，AIC を最小とする次数のモデルに対してだけ，(4)式の上三角連立一次方程式を解いて回帰係数を求める．

上記 QR 法の行列演算においては，(2)の上三角行列への変換に最も計算時間がかかり，AIC_k やその最小値を求めるための計算時間は無視できるほど微少である．

4. 精度評価計算

以下においては，n 資産 $S^i\,(i=1,\ldots,n)$ のうちの最大値および幾何平均値に対するアメリカン・コール・オプションの計算を行う．オプション行使時のペイオフは，最大値オプションの場合は，

$(\max_{i=1,\ldots,n} S_t^i - E)^+$　ここで $(z)^+ = \max(z,0)$，E：行使価格

幾何平均値オプションの場合は，

$$\left((S_t^1 \cdots S_t^n)^{1/n} - E\right)^+$$

である．リスク中立確率のもとで，各資産の価格は相関をもつ幾何ブラウン運動に従うとする．すなわち，

$$dS_t^i / S_t^i = (r - \delta_i)\,dt + \sigma_i\,dW_t^i \tag{5}$$

ここで，r は無リスク金利，δ_i は配当率，σ_i はボラティリティーである．W^i は標準ブラウン運動であり，W^i と W^j の間の相関係数を ρ_{ij} とする．以下の計算においては，問題を対称的とするため，$\delta_i = \delta$，$\sigma_i = \sigma$ および $\rho_{ij} = \rho\,(i,j=1,\ldots,n, i \neq j)$ とし，資産によらない一定値を与える．

満期 T までの時間を M 等分し，式(5)を時間間隔 $\Delta t = T/M$ を用いて離散化すると次式となる（$S_{t_k} = S_k$ とおく）．

$$S_k^i = S_{k-1}^i \exp\left((r - \delta - \sigma^2/2)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_k^i\right) \tag{6}$$

ここで，$Z_k^i\,(i=1,\cdots,n)$ は相関をもつ多次元正規乱数である．これを生成するためには，一様乱数列を多次元標準正規乱数列に変換し，コレスキー分解法を用いて相関を与える必要がある．一様乱数列の生成には Matsumoto-Nishimura[11]のメルセンヌ・ツイスター MT 19937 を

用い，標準正規乱数への変換には Moro[13] の逆関数法を用いる．

実際の計算においては，(6)式で生成された資産価格を行使価格で割って正規化を行い，ペイオフ関数などもそれに応じて正規化する．このような正規化によって，計算のオーバーフローを回避し，最小二乗法のマトリックス演算の精度を良好に保つことができる．

4.1　2資産最大値オプションの計算結果

まずケース 1 として，Broadie, Glasserman[6] に記載されている 2 資産最大値オプションをとりあげる．主要計算パラメーターは以下のとおりである．

$$E = 100, r = 0.05, \delta = 0.10, \sigma = 0.2, \rho = 0.3, T = 1.0, M = 3 \tag{7}$$

初期資産価格 $S_0\left(= S_0^1 = S_0^2\right)$ を変化させたケースについて，基底となる対称多項式の最大次数を 3，4，5 とした場合の結果を表 2 にまとめた．基底関数の個数はそれぞれ 6，9，12 個である．40,000 パス（20,000＋20,000 対照変量）の計算を 100 回繰り返したときの平均値と標準誤差を示している．40,000 パス/100 試行としたのは，標準誤差の値を各種文献の値と同程度にするためである．「真の値」とは Broadie, Glasserman[6] に記載されている格子計算で得られた値であり，また，参考のために，4 次以下の単項多項式を基底関数とした場合の結果を最後の列に付記してある．この場合の基底関数の個数は 15 である．

表 2 をみると，対称多項式の次数をあげていくにつれて，平均値はだんだん大きくなって真の値に収束していく様子がわかる．これは，最小二乗モンテカルロ法の推定は負のバイアスをもつ（low estimator）という事実を裏付けている．また，4 次対称多項式の場合と 5 次対称多項式の場合の結果にあまり違いはない．これは，「基底関数の数を増やしていって，計算結果にあまり違いがなくなったらやめる」という Longstaff-Schwartz[10] の試行錯誤的な基底関数の選び方の根拠を示している．

表 2　2 資産最大値オプション　ケース 1（Broadie-Glasserman[6]）

初期価格	3 次対称多項式 平均（標準誤差）	4 次対称多項式 平均（標準誤差）	5 次対称多項式 平均（標準誤差）	真の値	4 次単項多項式 平均（標準誤差）
70	0.235 (0.0009)	0.236 (0.0009)	0.237 (0.0009)	0.237	0.236 (0.0009)
80	1.254 (0.0021)	1.256 (0.0022)	1.258 (0.0021)	1.259	1.258 (0.0022)
90	4.066 (0.0037)	4.073 (0.0036)	4.074 (0.0036)	4.077	4.075 (0.0036)
100	9.350 (0.0049)	9.357 (0.0048)	9.359 (0.0047)	9.361	9.359 (0.0047)
110	16.913 (0.0053)	16.925 (0.0053)	16.925 (0.0055)	16.924	16.926 (0.0054)
120	25.964 (0.0056)	25.978 (0.0056)	25.980 (0.0058)	25.980	25.980 (0.0056)
130	35.751 (0.0056)	35.763 (0.0059)	35.764 (0.0057)	35.763	35.765 (0.0056)

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=3
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

5 次対称多項式を用いた場合の平均値と真の値との差は，最大で 0.003 であり，すべて 1 標準誤差より小さい．これは，モンテカルロ・シミュレーションの結果としては非常に高精度で

ある．また，4 次単項多項式の場合の結果も同様のよい精度をもっている．これは，4 次以下の単項多項式の方が 5 次以下の対称多項式より基底関数の数が 3 個多いためである．

計算は 800 MHz　Pentium　III　PC を用いて行っている．初期価格 100 のケースに対する 40,000 パス/100 試行の計算時間は，3 次対称多項式の場合は 2 分 19 秒，4 次対称多項式の場合は 4 分 6 秒，5 次対称多項式の場合は 6 分 15 秒，4 次単項多項式の場合は 8 分 3 秒である．基底関数の個数が増えると計算時間はほぼ基底関数の個数に比例している．

ケース 2 は Broadie–Glasserman–Jain[8]の 2 資産最大値オプションである．このケースは(7)のパラメーターのうち，$T = 3.0$ としたものである．パス数や試行回数はケース 1 と同じである．表 3 に，5 次以下の対称多項式と 4 次以下の単項多項式を基底関数とした場合の結果を真の値と比較してある．

平均値と真の値との差は，5 次対称多項式の場合は最大で 0.004，4 次単項多項式の場合は最大で 0.007 であり，すべて 1 標準誤差より小さい．また，平均値はすべて負のバイアスをもっている．ケース 2 においても計算精度は非常によい．

表 3　2 資産最大値オプション　ケース 2（Broadie–Glasserman–Jain[8]）

初期価格	5 次対称多項式 平均　（標準誤差）	4 次単項多項式 平均　（標準誤差）	真の値
80	3.641 (0.0044)	3.642 (0.0045)	3.643
90	7.233 (0.0061)	7.234 (0.0060)	7.234
100	12.411 (0.0068)	12.409 (0.0067)	12.412
110	19.056 (0.0080)	19.054 (0.0079)	19.059
120	26.871 (0.0086)	26.868 (0.0088)	26.875

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=3.0、時間ステップ数 M=3
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

最後に，ケース 3 として Raymar–Zwecher[14]の例を計算する．このケースは(7)のパラメーターのうち，$M = 10$ とし，初期資産価格と行使価格を変化させたものである．パス数や試行回数はケース 1，2 の場合と同じである．表 4 に，5 次以下の対称多項式と 4 次以下の単項多項式を基底とした場合の結果を真の値と比較してある．

平均値と真の値との差は，5 次対称多項式の場合は最大で 0.005 であり非常に小さい．また，真の値は標準誤差から計算される 90% 信頼区間内におさまっている．4 次単項多項式の場合も誤差の最大値は 0.007 であり，大部分は 90% 信頼区間内に真の値がおさまっており計算精度は良好である．バイアスは正にも負にもなっており，ケース 3 でも，5 次以下の対称多項式あるいは 4 次以下の単項多項式を基底関数とすれば真の値に収束することを示している．

初期価格（100,100）/行使価格 100 に対する計算時間は，5 次対称多項式の場合は 33 分，4 次単項多項式の場合は 35 分 47 秒である．時間ステップ数が増えたため大幅に計算時間が増えている．

表 4　2 資産最大値オプション　ケース 3（Raymar–Zwecher[14]）

初期価格	行使価格	5 次対称多項式 平均（標準誤差）	4 次単項多項式 平均（標準誤差）	真の値
100 110	70	40.934 (0.0047)	40.932 (0.0047)	40.930
	100	13.940 (0.0038)	13.941 (0.0038)	13.945
	130	2.095 (0.0027)	2.096 (0.0026)	2.093
100 100	70	34.520 (0.0029)	34.518 (0.0030)	34.525
	100	9.539 (0.0043)	9.539 (0.0042)	9.543
	130	1.065 (0.0021)	1.061 (0.0020)	1.062
100 90	70	30.774 (0.0040)	30.770 (0.0041)	30.776
	100	7.155 (0.0035)	7.152 (0.0036)	7.158
	130	0.680 (0.0017)	0.677 (0.0016)	0.677

注）無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=10
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

以上の 3 ケースの結果から，2 資産最大値オプションに対しては，5 次以下の対称多項式あるいは 4 次以下の単項多項式を基底関数とすればよいことがわかる．基底関数の個数としては，12〜15 の範囲である．本節で単項多項式を用いた計算の精度を調べたのは，6 節で単項多項式を用いた 2 次元計算を行う必要があるからである．

4.2　5 資産最大値オプションの計算結果

5 資産最大値オプションの計算ケースとして，Raymar–Zwecher[14]に記載されている計算例をとりあげる．条件は前節の(7)と同じで資産数を 5 個に増やした最大値オプションである．この計算例は，Raymar–Zwecher が Broadie–Glasserman[6]の方法（ランダム・ツリーによる挟みうち法）で長時間の再計算を行い，上限値と下限値を精密化したものである．5 次（基底関数 19 個），6 次（29 個），7 次（42 個）までの対称多項式を基底とした場合の計算結果と挟みうち法による下限値/上限値を表 5 に比較している．2 資産の最大値オプションの場合と同じく，多項式の次数をあげていくと平均値は大きくなっていく．5 次多項式の場合の平均値は B&G 下限値より小さくなることもあるが，6 次と 7 次の場合の平均値は下限値と上限値との間におさまっている．従って，5 資産の最大値オプションの場合には 6 次以下の対称多項式を用いれば十分精度のよい近似解が得られる．

初期価格 100 に対する計算時間は，5 次多項式の場合は 15 分 27 秒，6 次多項式の場合は 36 分 45 秒，7 次多項式の場合は 66 分 19 秒であり，基底関数の個数の増加とともにほぼ 2 倍の割合で計算時間が増加する．

4.3　幾何平均値オプションの計算結果

本節では，Broadie–Glasserman[7]に記載されている 5 資産と 7 資産の幾何平均値に対するアメリカン・コール・オプションの計算結果を示す．本ケースは 1 次元のアメリカン・オプショ

表 5　5 資産最大値オプション（Raymar–Zwecher[14]）

初期価格	5 次対称多項式 平均（標準誤差）	6 次対称多項式 平均（標準誤差）	7 次対称多項式 平均（標準誤差）	B&G 下限値	 上限値
80	2.704 (0.0030)	2.707 (0.0030)	2.709 (0.0030)	2.706	2.709
100	15.883 (0.0054)	15.887 (0.0053)	15.889 (0.0053)	15.884	15.895
120	36.489 (0.0068)	36.492 (0.0068)	36.496 (0.0068)	36.482	36.500

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=3
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

ンに帰着できるので，真の値を二項モデルによって十分精度よく近似することができる．計算パラメーターは以下のとおりである．

$$E = 100, r = 0.03, \delta = 0.05, \sigma = 0.4, \rho = 0.0, T = 1.0, M = 10$$

表 6 は，5 資産の場合について初期資産価格（資産によらず同一）を変化させた場合の結果である．3 次（基底関数 7 個），4 次（12 個）および 5 次（19 個）までの対称多項式を基底とした場合の結果を比較している．時間ステップ数が大きいのと本質的に 1 次元問題であるので，20,000 パス（10,000＋10,000 対照変量）の計算を 100 回繰り返して平均値を求めた．

3 次多項式の場合は，バイアス（負）は 0.01 程度であるが，4 次多項式を用いるとバイアスは 0.004 以下となり，正のバイアスとなる場合もある．5 次多項式の場合はバイアスは正である．このケースは 4 次対称多項式の場合が一番精度がよい．このように，幾何平均値オプションと前節の最大値オプションとでは，基底関数の最適次数が異なっている．

5 資産の初期価格 100 に対する計算時間は，3 次多項式の場合は 6 分 44 秒，4 次多項式の場合は 13 分 39 秒，5 次多項式の場合は 29 分 34 秒である．5 資産の最大値オプションの場合と同様，基底関数の個数の増加とともにほぼ 2 倍の割合で計算時間が増加している．

表 6　5 資産の幾何平均値オプション（Broadie–Glasserman[7]）

初期価格	3 次対称多項式 平均（標準誤差）	4 次対称多項式 平均（標準誤差）	5 次対称多項式 平均（標準誤差）	真の値
90	1.357 (0.0025)	1.362 (0.0026)	1.366 (0.0026)	1.362
100	4.281 (0.0037)	4.287 (0.0036)	4.292 (0.0036)	4.291
110	10.199 (0.0037)	10.213 (0.0037)	10.216 (0.0036)	10.211

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.03、配当率 δ=0.05、相関係数 ρ=0.0
ボラティリティー σ=0.4、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=10
パス数=20,000（10,000+10,000 対照変量）、試行回数=100

表 7 は 7 資産についての結果である．7 資産の場合も 5 資産の場合と同様で，4 次以下の対称多項式によって十分な精度で近似することができる．

7 資産の初期価格 100 に対する計算時間は，3 次多項式の場合は 8 分 55 秒，4 次多項式の場合は 17 分 46 秒，5 次多項式の場合は 40 分 41 秒である．

表 7　7 資産の幾何平均値オプション（Broadie–Glasserman[7]）

初期価格	3 次対称多項式 平均（標準誤差）	4 次対称多項式 平均（標準誤差）	5 次対称多項式 平均（標準誤差）	真の値
90	0.755 (0.0016)	0.760 (0.0017)	0.763 (0.0017)	0.761
100	3.267 (0.0026)	3.268 (0.0025)	3.272 (0.0025)	3.270
110	10.0 (0.0)	10.0 (0.0)	10.0 (0.0)	10.0

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.03、配当率 δ=0.05、相関係数 ρ=0.0
ボラティリティー σ=0.4、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=10
パス数=20,000（10,000+10,000 対照変量）、試行回数=100

5.　回帰領域の分割

多項式回帰の場合，全領域を一つの多項式を用いて回帰するよりもいくつかの部分領域に分けて回帰する方が局所特性を捉えてあてはまりがよく，また低い次数の多項式で近似できることが当然予想される．最小二乗モンテカルロ法は部分領域に分けて回帰する場合でも，それぞれの領域で他の領域とは無関係に回帰を行えばよいので，計算アルゴリズムもそれほど複雑化しない．従って，回帰領域の分割は，最小二乗モンテカルロ法の計算精度の向上や計算時間短縮のための有力な方法の一つである．

5.1　1 次元の場合

1 次元問題のプットやコール・オプションの場合，回帰曲線は直線から曲線へと，領域の途中で特性が変化するので，領域を二つ程度に分割した方があてはめ精度が向上することが予想される．そこで，全領域を一つの多項式で回帰した場合と，資産価格が行使価格より大きいか小さいかによって二つの領域に分割して回帰した場合について，多項式次数を変化させ AIC を比較してみた．

表 8 は，以下のパラメーター（文献[9]参照）

$$S_0 = 100, E = 100, r = 0.05, \delta = 0.10, \sigma = 0.2, T = 0.5, M = 2$$

をもつコール・オプションを，20,000 パス（10,000＋10,000 対照変量）を用いて 100 回繰り返したときの AIC の平均値である．

表 8 からわかるように，1 領域計算と 2 領域計算とでは，AIC の値に顕著な差があり，2 領域計算の方が AIC の値が小さく，あてはまりの精度がよいことがわかる．また，1 領域計算の場合には，6 または 7 次多項式の AIC が最小であるのに対し，2 領域計算の場合には 3 次多項式の AIC が最小である．

表 8　1 領域と 2 領域計算の AIC 平均値の比較

多項式次数	1 領域計算	2 領域計算
2	−55322	−63333
3	−55330	−63348
4	−55369	−63346
5	−55372	−63344
6	−55374	−63343
7	−55374	−63342

表 8 の結果を踏まえて，Tilley[15]に記載されているプット・オプションの計算を 1 領域と 2 領域で行い，表 9 に結果を比較した．1 領域計算は 3，5，7 次多項式を用い，2 領域計算は 3 次多項式を用いて，行使価格を変化させて計算している．「真の値」は，Tilley[15]に記載されている 2 項モデルによる近似値を表している．計算パラメーターは以下のとおりである．

$$S_0 = 40, r = \log(1.07), \delta = 0.0, \sigma = 0.3, T = 3.0, M = 12$$

表 9 からわかるように，3 次多項式を用いた 2 領域計算は，7 次多項式を用いた 1 領域計算と同等かそれ以上の精度をもっている．従って，1 次元計算の場合には，領域分割は非常に有効である．

1 領域計算の場合，前節の多次元計算の結果と同じく，多項式の次数をあげていくと平均値は増加しながら真の値に収束していく様子がわかる．

行使価格 40 に対する計算時間は，1 領域 3 次多項式の場合は 2 分 30 秒，5 次多項式の場合は 4 分 14 秒，7 次多項式の場合は 6 分 20 秒である．一方，2 領域 3 次多項式の場合は 2 分 38 秒であり，1 領域 3 次多項式の場合より 8 秒増加しているだけである．これは領域分割によって回帰行列のサイズが小さくなったため，最小二乗法回帰のための行列演算を各時間ステップ毎に 2 回行うにもかかわらず計算時間はほとんど増えないことを意味している．このように領域分割は計算時間短縮の面からも有効である．

表 9　1 領域計算と 2 領域計算の比較（Tilley[15]）

	1 領域計算			2 領域計算	
行使価格	3 次多項式 平均（標準誤差）	5 次多項式 平均（標準誤差）	7 次多項式 平均（標準誤差）	3 次多項式 平均（標準誤差）	真の値
10	0.002 (0.00003)	0.002 (0.00004)	0.002 (0.00004)	0.003 (0.00004)	0.003
15	0.037 (0.0002)	0.042 (0.0002)	0.046 (0.0002)	0.047 (0.0002)	0.046
20	0.219 (0.0006)	0.237 (0.0006)	0.241 (0.0006)	0.243 (0.0007)	0.242
25	0.722 (0.0012)	0.741 (0.0012)	0.743 (0.0012)	0.744 (0.0012)	0.744
30	1.677 (0.0017)	1.683 (0.0018)	1.685 (0.0017)	1.688 (0.0018)	1.689
35	3.157 (0.0021)	3.166 (0.0021)	3.170 (0.0020)	3.171 (0.0021)	3.172
40	5.216 (0.0024)	5.241 (0.0022)	5.242 (0.0022)	5.245 (0.0023)	5.247
45	7.910 (0.0027)	7.937 (0.0026)	7.937 (0.0026)	7.942 (0.0026)	7.941
50	11.230 (0.0034)	11.244 (0.0033)	11.249 (0.0033)	11.251 (0.0033)	11.255
55	15.118 (0.0035)	15.124 (0.0035)	15.132 (0.0036)	15.132 (0.0036)	15.136
60	20.0 (0.0)	20.0 (0.0)	20.0 (0.0)	20.0 (0.0)	20.0

注）初期価格 S_0=40、無リスク金利 r=log(1.07)、配当率 δ=0.0
ボラティリティー σ=0.3、満期 T=3.0、時間ステップ数 M=12
パス数=20,000（10,000+10,000 対照変量）、試行回数=100

5.2　多次元の場合

多次元の場合にも，前節の 1 次元の方法を拡張して，各座標軸を複数個に分割するという方法が考えられるが，この方法は次元の増加につれて全分割数が指数関数的に増えるという欠点

がある．このような欠点を回避する方策として，クラスター分析の手法を用い，資産価格データの類似性に着目して領域分割を行うという方法が考えられる．以下においては，クラスタリング手法の中で最もポピュラーな K-means 法を用いた計算例を示す．

K-means 法とは，データの集合 $\{x^n\}$ を N_j 個の点を含む K 個の互いに交わらない領域 R_j に分割し，以下の関数を最小化するように N_j と R_j を選ぶ方法である．

$$J=\sum_{j=1}^{K}\sum_{n\in R_j}\|x^n-\mu_j\|^2$$

ここで，μ_j は R_j 中のデータの平均ベクトルであり，次式で表される．

$$\mu_j=\frac{1}{N_j}\sum_{n\in R_j}x^n$$

関数 J の最小化は，ニューラルネットワークの学習の考え方を用いて逐次的に行われる．すなわち，μ_j の初期値をデータ中からランダムに K 個選び，x^n を逐次的に提示しながら，x^n に最も近いベクトル μ_j を以下の式で更新する．

$$\Delta\mu_j=\eta(x^n-\mu_j)$$

ここで，η は学習率であり，通常 0.03−0.05 程度の値が用いられる．クラスターの平均ベクトル μ_j が求まると，これから最も近い点の集合（ボロノイ分割）としてクラスター R_j が決定される．

K-means 法による領域分割を用いた最小二乗モンテカルロ法は，各時間ステップにおいて，資産価格データを K 個のクラスター R_j に分割し，各 R_j 上で別々に回帰を行ってオプションの続行価値を計算する．

表 10 は，以下のような計算パラメーター（Broadie-Glasserman[7]参照）

$$E=100, r=0.05, \delta=0.10, \sigma=0.2, \rho=0.0, T=3.0, M=6$$

をもつ 5 資産最大値オプションの計算例である．3 次対称多項式（基底関数 7 個）と 6 次対称多項式（29 個）を用いた 1 領域計算と 3 次対称多項式を用いた 20 領域計算の結果を比較している．参考のために，Broadie-Glasserman[7]の点推定値および 90% 信頼区間の下限値と上限値を最後の列に記載してある．

3 次対称多項式を用いた 1 領域計算の値は，Broadie-Glasserman[7]の 90% 信頼区間の下限値より大幅に小さく精度が悪い．一方，3 次多項式を用いた 20 領域計算は，6 次多項式を用いた 1 領域計算とほぼ同等の精度をもっており，Broadie-Glasserman[7]の点推定値とも近い．このことは，局所的には，低次の多項式を用いても十分あてはまりのよい回帰ができることを示している．

初期資産価格 100 に対する計算時間は，1 領域 3 次多項式の場合で 7 分 16 秒，6 次多項式の場合で 91 分 13 秒である．一方，20 領域 3 次多項式の場合は 11 分 17 秒であり，1 領域 6 次対称多項式の場合の約 8 分 1 の計算時間で同精度の結果が出ている．1 次元計算の場合と同じく，領域分割法は計算時間短縮の面で非常に有効である．

表 10 の領域分割計算においては，最適な領域分割の個数の決定を試行錯誤的に行っている．すなわち，分割の個数を増加させるとオプション価格の平均値は増加するので，平均値が妥当な値となるまで分割個数を増加させるという方法である．領域分割法においては最適な分割個数をどのように決定するかが重要なポイントとなる．

表 10　1 領域計算と 20 領域計算の比較（5 資産最大値オプション）

初期資産価格	1 領域計算		20 領域計算	B&G 90%信頼区間
	3 次対称多項式 平均（標準誤差）	6 次対称多項式 平均（標準誤差）	3 次対称多項式 平均（標準誤差）	点推定値 下限値　上限値
90	16.405 (0.0081)	16.474 (0.0080)	16.467 (0.0081)	16.474 16.438　16.505
100	25.830 (0.0093)	25.921 (0.0094)	25.918 (0.0093)	25.920 25.889　25.948
110	36.388 (0.0104)	36.487 (0.0105)	36.489 (0.0104)	36.497 36.466　36.527

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.0
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=3.0、時間ステップ数M=6
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

6.　情報縮約の効果

Barraquand–Martineau[4]は，多次元アメリカン・オプションに対して，確率制御問題のアイデアを用いた SSAP（Stratified State Aggregation along the Payoff）法というシミュレーション法を提唱した．この方法は，多次元空間をペイオフ関数によって 1 次元空間に写像し，1 次元空間を各時間ステップ毎に 100 個程度の領域に分割した後，シミュレーション・パスから領域間の推移確率を求めてオプション価格を計算する．しかしながら，この方法は資産価格情報を 1 次元に縮約しているため，合理的な権利行使を判断することができず，いくらパス数や領域分割数を増やしても真の値に収束する保証がないことが Boyle, Broadie and Glasserman[5]によって指摘されている（湯前，鈴木[3]参照）．

Raymar–Zwecher[14]は，このような問題を解決する方法として，最大値オプションの多次元資産価格情報を 2 次元情報に縮約するような拡張を行った．ペイオフ関数値（資産価格の最大値）に加えて，2 番目に高い資産価格などを新たな情報として加えて，権利行使判断の精度の向上を図っている．

本節では，このような情報縮約の効果，すなわち，多次元資産価格情報を 1 次元あるいは 2 次元情報に縮約した場合の計算精度について検討する．最小二乗モンテカルロ法における情報縮約は，全資産の価格情報フィルトレーション $\Im_t$ の代わりに

$$\Im_t^1 = \{\text{1 次元縮約情報から生成されるフィルトレーション}\} \tag{8}$$

あるいは

$$\Im_t^2 = \{\text{2 次元縮約情報から生成されるフィルトレーション}\}$$

に対して，(1)式の条件付期待値を求めることによって行われる．すなわち，回帰の説明変数として，全資産の価格情報ではなく 1 次元あるいは 2 次元の縮約情報を用いる．

6.1　幾何平均値オプション

4.3 節の幾何平均値オプションは本質的には 1 次元問題である．従って，(1)式の回帰計算を全資産の価格情報に対して行う必要はなく，1 次元の縮約情報に対して行えば十分な筈である．そこで，(8)式のフィルトレーションとして，

$$\{\text{幾何平均値 } (S_t^1 \cdots S_t^n)^{1/n} \text{ によって生成される 1 次元縮約情報}\}$$

を用いた 1 次元計算を行い，結果を表 11 にまとめた．計算条件は 4.3 節と同じであり，1 次元計算は 5.1 節の 3 次多項式を用いた 2 領域分割法で行っている．

1 次元計算の平均値と真の値との差は最大で 0.005 であり，真の値は標準誤差から計算され

る 90% 信頼区間の中に含まれている．従って，幾何平均値オプション価格は，1 次元縮約情報によって十分精度よく近似することができる．

表 11　幾何平均値オプション 1 次元計算結果

初期価格	5 資産		7 資産	
	平均（標準誤差）	真の値	平均（標準誤差）	真の値
90	1.364 (0.0027)	1.362	0.761 (0.0018)	0.761
100	4.286 (0.0036)	4.291	3.269 (0.0025)	3.270
110	10.212 (0.0037)	10.211	10.0 (0.0)	10.0

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.03、配当率 δ=0.05、相関係数 ρ=0.0
ボラティリティー σ=0.4、満期 T=1.0、時間ステップ数 M=10
パス数=20,000（10,000+10,000 対照変量）、試行回数=100

6.2　最大値オプション

最大値オプションについては，4.2 節の 5 資産最大値オプションの計算例に対して，以下の三つの縮約情報に関する回帰計算を行い結果を比較する．

ケース 1：最大資産価格によって生成される 1 次元縮約情報

ケース 2：最大資産価格および次式のノルムによって生成される 2 次元縮約情報

$$\|S_t\| = \sum_{1 \le j < k \le n} \left(S_t^j - S_t^k\right)^2$$

ケース 3：最大資産価格および 2 番目に大きい資産価格によって生成される 2 次元縮約情報

ケース 1 は Barraquand–Martineau[4]，ケース 2 は Fu–Laprise–Madan–Su–Wu[9]，ケース 3 は Raymar–Zwecher[14] の次元縮小方法に相当する．

表 12 は，ケース 1〜3 および 6 次対称多項式を用いた 5 次元計算の結果のまとめである．ケース 1 は 3 次多項式を用いた 2 領域分割計算であり（5.1 節参照），ケース 2 と 3 は 4 次以下の単項多項式を基底関数として用いている（4.1 節参照）．

1 次元計算（ケース 1）および 2 次元計算（ケース 2，3）のオプション価格はいずれも，行使/続行の判断が最適になされていないために，最後の列の 5 次元計算の値より小さい．ATM および ITM 初期価格の場合，ケース 1 およびケース 2 の結果は 5 次元計算結果の 99% に達しないが，ケース 3 の結果は 99.93% 以上であり非常に精度がよい．

ケース 2 の結果はケース 1 の 1 次元計算よりほんの少し良好な程度で，この次元縮小法は最大値オプションに対してはあまり効果的ではない．文献[9]において，ケース 2 の次元縮小法を用いて計算されたオプション価格が他の手法の結果に較べて大幅に小さいことからも同様の結論が得られる．一方，Raymar–Zwecher が用いたケース 3 の次元縮小法は最大値オプションに対しては非常に効果的である．

7.　計算時間の短縮

これまでの結果からわかるように，最小二乗モンテカルロ法は適切な基底関数を選んで回帰を行えば非常に精度がよい．しかしながら，各時間ステップにおいて最小二乗回帰のための行

表 12　5 資産最大値オプションの情報縮約計算結果の比較

	ケース 1	ケース 2	ケース 3	5 次元計算
初期価格	平均（標準誤差）	平均（標準誤差）	平均（標準誤差）	平均（標準誤差）
70	0.552 (0.0014)	0.553 (0.0014)	0.553 (0.0014)	0.555 (0.0014)
80	2.685 (0.0030)	2.691 (0.0031)	2.704 (0.0030)	2.707 (0.0030)
90	7.717 (0.0046)	7.733 (0.0046)	7.812 (0.0045)	7.817 (0.0046)
100	15.650 (0.0056)	15.683 (0.0056)	15.876 (0.0053)	15.887 (0.0053)
110	25.424 (0.0062)	25.473 (0.0062)	25.783 (0.0060)	25.801 (0.0061)
120	36.012 (0.0067)	36.071 (0.0068)	36.469 (0.0065)	36.492 (0.0068)
130	46.864 (0.0072)	46.936 (0.0075)	47.403 (0.0072)	47.432 (0.0073)

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=1.0、時間ステップ数M=3
パス数=40,000（20,000+20,000 対照変量）、試行回数=100

列演算を行うため，基底関数の個数や時間ステップ数が増えると非常に計算時間がかかるのが欠点である．以下においては，このような欠点を克服するためのいくつかの方法について考察する．

7.1　ITM サンプルパスのみを用いる方法

Longstaff–Schwartz[10]は，各時間ステップにおいて ITM となったサンプルパスのみを用いて回帰を行うことによりかなりの計算時間の短縮が図れると述べている．事実，ITM サンプルパスの数が極端に少なくなければ，ITM サンプルパスのみを用いた計算と全サンプルパスを用いた計算はほぼ同精度である．従って，ATM 初期価格に対する計算においては，ITM パスのみを用いる方法によって計算時間の短縮を図ることができる．しかしながら，OTM 初期価格に対しては全サンプルパスを用いることも必要であり，ITM の度合いが大きくなると ITM サンプルパスの数が増えるため，計算時間の短縮効果は薄れていく．

7.2　2 段 階 法

最小二乗モンテカルロ法において計算時間がかかるのは，最小二乗法を用いて回帰係数を求める行列演算の部分である．従って，行列演算の回数を減らすことが計算時間の短縮につながる．2 段階法は，第 1 段階において 1 組のサンプルパスから回帰係数を求め，第 2 段階においてこの回帰係数を用いて多数のサンプルパスの組からオプション価格を計算するという方法である．すなわち，第 1 段階において行使/続行のルールを定め，このルールを用いて第 2 段階でオプション価格を計算する．この方法は，Raymar–Zwecher[14]の 3–ステージ法と同じであり，また，1 組のサンプルから学習し，他のサンプルでテストや評価を行うというニューラルネットワークの考え方とも一致する．2 段階法においては行列演算が第 1 段階に限られるため，大幅な計算時間の短縮を図ることができる．

表 13 は，4.1 節の 2 資産最大値オプション・ケース 1 に対して 2 段階法を適用した結果をまとめたものである．第 1 段階において，50,000（25,000＋25,000 対照変量）パスから 5 次以

下の対称多項式を基底関数とする回帰係数を求め，第2段階において，この回帰係数を用いて計算された100試行のオプション価格の平均値を算出している．

第1段階で求めた行使/続行ルールが最適ではないため，バイアスはすべて負となっているが，その絶対値の最大は0.006であり非常に小さい．真の値は初期価格70の場合を除いて，標準誤差から計算される90%信頼区間の中に含まれている．

表13　2資産最大値オプション2段階法計算結果

初期価格	2段階法計算値 平均値　（標準誤差）	真の値	バイアス
70	0.235　(0.0007)	0.237	−0.002
80	1.258　(0.0018)	1.259	−0.001
90	4.075　(0.0032)	4.077	−0.002
100	9.357　(0.0039)	9.361	−0.004
110	16.920　(0.0039)	16.924	−0.004
120	25.974　(0.0041)	25.980	−0.006
130	35.758　(0.0042)	35.763	−0.005

注）行使価格 E=100、無リスク金利 r=0.05、配当率 δ=0.10、相関係数 ρ=0.3
ボラティリティー σ=0.2、満期 T=1.0、時間ステップ数M=3
パス数=50,000（25,000+25,000対照変量）、試行回数=100

初期価格100に対する2段階法の計算時間は53秒であり，100試行のすべてにおいて行列演算を行って回帰係数を求める従来の方法の計算時間は7分57秒であった．従って，9分の1の計算時間でほぼ同精度の解が得られており，本ケースの2資産最大値オプションに対しては，2段階法は非常に有効である．

2段階法は，第1段階で用いるパス数を2段階より大きくするとか，第1段階の計算に準乱数を用いるとか，第1段階を複数回実施して計算精度をあげるなどの様々なバリエーションが考えられ，最適な方法の選択が今後の研究課題である．

7.3　その他の方法

計算時間の短縮を図るための方法としては，上記のほかに，5節で述べた領域分割法がある．領域分割によって低次の基底関数を用いることができるので，基底関数の個数を減らすことができる．また，回帰行列のサイズが小さくなるので，領域数が増えても計算時間はそれほど増加しないという利点もある．

8.　結論と今後の課題

対称多項式を基底関数とした最小二乗モンテカルロ法の精度評価の結論をまとめると以下のようになる．

1）　最小二乗モンテカルロ法は，基底関数を適切に選択すれば非常に精度がよい．2資産の最大値オプションの場合には，4次以下の対称多項式あるいは5次以下の単項多項式を用いると十分な精度の結果が得られる．5資産の最大値オプションの場合には，6次対称多項式が適切である．これらの結果から類推すると，必要な基底関数の個数のめやすは，多く見積もって，2次元の場合には15個程度，5次元の場合には30個程度である．

2）　回帰領域の分割は計算時間短縮の面で非常に有効である．領域分割によって低次の基底

関数を用いることができ，基底関数の個数を減らすことができるからである．また，回帰行列のサイズが小さくなるので，領域数が増えても計算時間はそれほど増加しない．しかしながら，領域分割の個数をいくつにするかについての判断基準が必要である．

3） Raymar-Zwecher[14]の次元縮小法は，最大値オプションに対しては非常に有効である．このような有効な縮約情報がみつかれば計算時間の大幅な短縮を実現できる可能性がある．

4） 計算時間の短縮については，第1段階において1組のサンプルパスから回帰係数を求め，第2段階においてこの回帰係数を用いて多数のサンプルパスの組からオプション価格を計算するという2段階法が有力である．

今後の課題としては，対称多項式が使えない一般のオプション価格計算における基底関数とその個数の選択の問題が一番重要である．多変数の直交多項式を用いる方法，ニューラルネットワークを用いる方法などが考えられるがいずれも大きな検討課題である．計算時間の短縮に関しては領域分割法や2段階法が有力であるが，これらについても種々の検討課題が残されている．Longstaff-Schwartz[10]においては，準乱数を用いる方法や計算の並列化があげられているが，これらも重要な研究テーマである．

＊1 単項多項式とは，$x=(x_1,\ldots,x_n)$ を変数，$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を $\alpha_i \geq 0 (i=1,\ldots,n)$ なる整数値インデックスとするとき，$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ と表される多項式．

＊2 対称多項式とは，$(1,\ldots,n)$ のすべての置換 σ に対して $g(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_n})=g(x_1,\ldots,x_n)$ となる多項式．

参考文献

［1］ 北川源四郎（1993）「FORTRAN 77 時系列解析プログラミング」岩波書店

［2］ 坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎（1983）「情報量統計学」，共立出版

［3］ 湯前祥二，鈴木輝好（2000）「モンテカルロ法の金融工学への応用」朝倉書店

［4］ Barraquand, J. and D. Martineau (1995), "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities," Journal of Financial and Quantitative Analysis, 30, 383-405.

［5］ Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman (1997), "Monte Carlo methods for security pricing," Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 1267-1321.

［6］ Broadie, M. and P. Glasserman (1997 a), "Pricing American-Style Securities using Simulations," Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 1323-52.

［7］ Broadie, M. and P. Glasserman (1997 b), "A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options," Working Paper, Columbia University.

［8］ Broadie, M., P. Glasserman and G. Jain (1997), "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices," Journal of Derivatives, 5, 25-44.

［9］ Fu, M.C., S.B. Laprise, D.B. Madan, Y. Su, and R. Wu (2000), "Pricing American Options : A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches," Working Paper, University of Maryland.

［10］ Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz (2001), "Valuing American Options by Simulations : A Simple Least-Squares Approach," Review of Financial Studies, 14, 113-147.

［11］ Matsumoto, M. and T. Nishimura (1998), "Mersenne twister : A 623 dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator," ACM Trans. on Model. Comput. Simul., 8, 3-30.

［12］ Moreno, M. and J.F. Navas (2001), "On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives," Working Paper, Instituto de Empresa.

［13］ Moro, B. (1995), "The Full Monte," RISK, 8, 57-58.

［14］ Raymar, S. and M. Zwecher (1997), "Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks," Journal of Derivatives, 5, 7-23.

［15］ Tilley, J.（1993），”Valuing American Options in a Path Simulation Model，”Transactions of the Society of Actuaries, 45, 83–104.

執筆者紹介 岡　野　豊　明（Takaaki Okano）

1969年東京大学大学院数学科修士課程修了．1971年日本ユニバック総合研究所に入社．主として原子力安全解析分野における熱流動解析業務を担当．その後，日本ユニシス(株)にて，各種数値解析・統計解析業務・金融工学関連研究業務を担当．現在，産業技術総合研究所ものづくり先端技術研究センターに所属．