周辺面群との接続機能付きメッシュ面創成コマンドの開発

The Development of the Mesh Surface Generation G 1-Connecting to Neighboring Surfaces

清 水 保 弘, 関 戸 勝 己

要　約　メッシュ面創成コマンドはCADCEUSの曲面機能の一つであり，縦横の拘束線群間を内挿して自由曲面を創成する機能である．筆者らは，メッシュ面創成コマンドで周辺面群と接平面連続（G 1 連続）に接続する機能を新しく開発した．

曲面補間の基礎技術には，Gordon 面の手法を用いた．適用に際し，理論的に難解であったGordon 面を一般スプライン補間に関する石田理論に基づき平易に定式化した．さらにGordon 面の前提を満たすために，拘束線群を統一パラメタで整合する際の新手法，および，ツイスト整合への松木―木村理論の適用を工夫した．

これらの技術により，周辺面群と滑らかに接続する曲面の大域補間が可能となった．また，その結果，曲面の品質を向上させることにも成功した．

Abstract　The mesh surface generation is one of the surface functions of CADCEUS, which can construct a free form surface interpolating the given mesh curves as constraints. The authors have newly developed the function connecting to neighboring surfaces with G 1 continuity. We have applied the Gordon surface technique, originally difficult in theory, to the interpolation by formulating it in an easy manner on the base of Ishida's general spline interpolation method. In addition to that, to satisfy the premise of the Gordon surface, we have applied a new unified parameterization method to approximate the given constrained curves compatibly and implemented Matsuki-Kimura theory for the corner twist compatibility. By these techniques, we have achieved a smooth and global interpolation of the surface connected to neighboring surfaces, which has consequently improved the quality of the mesh surface.

1.　は じ め に

本稿は，CAD/CAM/CAE/CG 統合システム CADCEUS の CAD 幾何モデラにおける自由曲面創成機能の機能強化に関する技術報告である．

CAD で設計される製品形状の表面は，多くの曲面の張り合わせにより表現される．曲面のうち，平面・円柱面・円錐面・球面など解析幾何学的に表現できる曲面を解析面と称するが，意匠的な曲面・コーナに丸み付けした曲面（フィレット面）・周辺からぼかした曲面などの形状は解析面では表現できないことが多く，自由曲面とよばれる曲面表現が用いられる．

CADCEUS の幾何モデラには，様々な自由曲面創成機能が用意されている．本稿では，このうち，メッシュ面とよばれる「縦横複数の拘束線群から滑らかに内挿した自由曲面」を創成する機能について述べる．

メッシュ面創成コマンドの入力は，主方向（横方向）の（n＋1）本の拘束線群（n≧1）と従方向（縦方向）の（m＋1）本の拘束線群（m≧1）であり，主拘束線群と従拘束線群は格子状に交点を持つことが要請される．コマンドの出力は，これら拘束

線群を通る滑らかな自由曲面である（図1参照）.

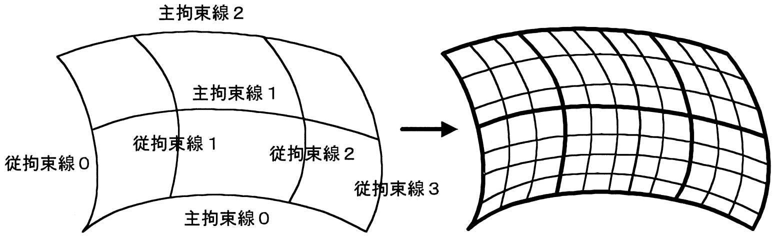


図 1　メッシュ面創成コマンド

メッシュ面創成コマンドには，これまで周辺面群との G^1 接続機能が実装されていなかった.

周辺面群との G^1 接続機能とは，最外郭拘束線沿いに分布する周辺面群と接平面が滑らかにつながる（G^1 接続する）ように面を創成する機能である（図2）.

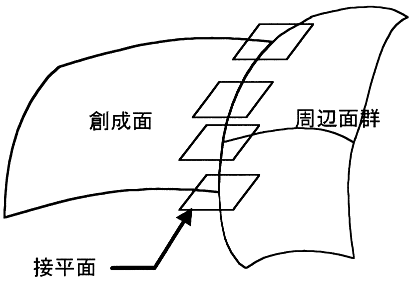


図 2　周辺面群との G^1 接続

CADの実務適用においては，各種コマンドで創成した面に面品質上の問題が検出された場合，縦横の特徴線を抽出し，これらを通過拘束線として面を張り直すことがしばしば行われる．メッシュ面創成コマンドの適用場面の一つは，こうした面の張り直しである．この際，周辺面群と滑らかに接続しなければならない場合も多く，メッシュ面創成コマンドには周辺面群との G^1 接続機能が必要とされる.

筆者らの目指した課題は，メッシュ面創成コマンドに周辺面群との G^1 接続機能を実装することであった．本章では，この課題の達成のため解決しなければならない技術的課題と方策について概説しておきたい.

説明中に「セグメント」，「パッチ」という用語が出てくるが，これはBスプラインという区分的多項式曲線・曲面表現方法での概念で，一つの多項式で記述できる曲線や曲面の素片を意味している．全体の曲線・曲面は，これらの繋がりで表現される．正確な意味は，2章にて説明する.

まず，周辺面群との G^1 接続以前に，メッシュ面創成の基本課題を実装技術的に述べると次のようになる.

メッシュ面創成の基本課題：セグメント数やその分布について整合性のない入力拘束線群から，拘束線群間の形状を補い，かつ，その形状を整然とした m×n パ

ッチのＢスプライン曲面として創成すること（図 3）.

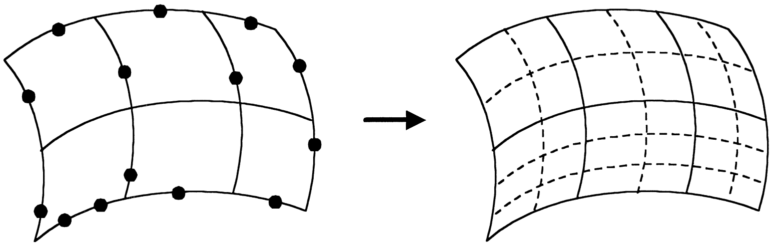


図 3　メッシュ面創成の基本課題（●はセグメント分割点を示す）

この基本課題を解くために，最初にしなければならない処理は，入力拘束線群の整合化である．図 3 のようにセグメント分割点位置がそろっていない線群に対して，主方向（横方向），従方向（縦方向）ごとにセグメント分割点位置をそろえ，かつ，対応するパラメタが等しくなるように再パラメタ付けをしなければならない．これは入力拘束線を統一されたパラメタ分布で近似し直すことを意味するが，できるだけ無理のない自然なパラメタ分布を工夫する必要がある．複数の線の対応付けでは，線の弧長（線沿い長さ）を基本にする方法がよく用いられる．しかし，各入力線の弧長は揃っていないので，何らかの平均をする必要がある．

従来は，対応するセグメントの弧長の単純平均などが用いられていたが，今回，より理論的裏付けのある「平均速度準単位化法」と名付ける手法を新たに考案して適用した（詳細は 3.2 節を参照）．こうした手法により入力線群を整合化すると，図 4 の状態を得る．

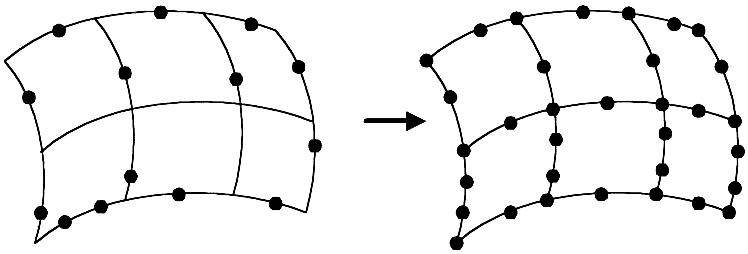


図 4　入力拘束線群の整合化（●はセグメント分割点を示す）

以上により，与えられた拘束線のセグメント数は整合される．メッシュ面創成コマンドで採用していた従来アルゴリズムでは，これ以外にパッチ境界線をすべて内部で補わなければならない．図 4 で説明すると，入力拘束線が通過していないセグメント分割点を結ぶ中間拘束線をパッチ境界線として内部生成する必要がある．これは前後の入力拘束線から局所的に補間する手法で行われていた．しかし，このような方法では

1）　中間拘束線の形状は与えられた入力拘束線の形状を補間した形状でなければならない，

2） 主（従）方向の中間拘束線は従（主）方向の拘束線群と交点を持たなければならない，

3） 中間拘束線は最外郭拘束線沿いに周辺面群と G^1 接続しなければならない，

の 3 条件の両立が困難であった．このため，周辺面群との G^1 接続機能が実装できなかった経緯がある．

今回，メッシュ面創成コマンドに周辺面群との G^1 接続機能を実現するにあたり，上記の問題点を踏まえて，大域的な補間アルゴリズムの適用を第一に考慮した．具体的には，B スプライン補間に基づいた Gordon 面張りアルゴリズムの採用である．これにより，上記の中間拘束線の補充が数学的にエレガントに行えるようになる（図 5 参照）．

Gordon 面張りは Coons 面張りの一般化である．しかし，Gordon の原論文[3][4][5]は難解なため，現在(株)トヨタソフトエンジニアリングに出向されている石田順二氏を除き，ユニシスの CAD の実装で試みられたことはなかった．ここ数年間で，石田氏の研究[6]をはじめ，Piegl-Tiller の教科書[9]の出版などにより，Gordon 面への理解が深まったことで，今回，メッシュ面創成コマンドへの実装が可能になった次第である．

本稿では，石田氏の理論[6]を参考に筆者らの工夫を加えて Gordon 面のわかりやすい定式化を行った．

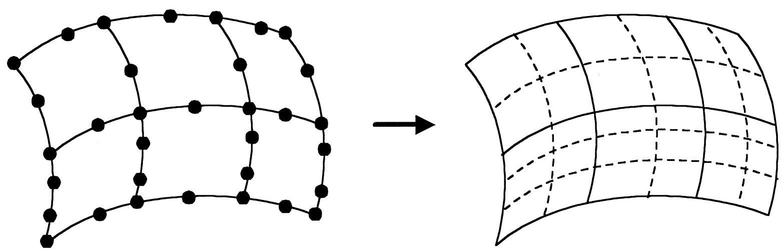


図 5 Gordon 面による大域補間（●は整合化後のセグメント分割点を示す）

最後に残る技術的課題は，周辺面群との G^1 接続に関するものである．周辺面群により，面境界線沿いに面法線ベクトルが拘束されることになる．これらの拘束条件は，面の 4 隅点で必ずしも整合しない．もちろん，各隅点での接平面は一通りに決まらなければならないが，隅点近傍での面法線ベクトルの変化が，隅点に合流する境界線毎に食い違うことがあるからである．このような現象を「隅点でのツイスト不整合」とよんでいる．最終的に周辺面群と G^1 接続した面を張るためには，面 4 隅でのツイスト不整合があれば，それを何らかの方法で解消しなければならない．今回は，このためツイスト不整合解消に関する松木・木村両氏の研究[8]を実装適用した．松木一木村理論はツイスト不整合解消のため，面の隅近傍のどこでパッチを分割すればよいかを指示してくれるすぐれた理論であるが，実装例は筆者らの知る限り初めてである．

本稿の構成は，以下の通りである．続く 2 章で，B スプラインと Gordon 面に関する準備を行う．3 章では，新しいメッシュ面創成コマンドのアルゴリズムを説明する．

上述したような入力拘束線の整合処理とツイスト不整合解消処理の技術的詳細は，3章で述べる．4章では，これまでのメッシュ面と新メッシュ面での形状比較を周辺面群との接続評価の観点から行う．また，大域的補間アルゴリズムの効果として，面品質が向上していることを断面線の曲率分布により評価する．5章では，残された課題を述べる．

2.　B スプラインと Gordon 面に関する準備

2.1　B スプライン曲線・曲面

本稿では，次数 $p \geqq 1$ と，ノット・ベクトル $T=\{t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_{K+p+1}\}$ により定義される p 次の B スプライン基底関数の一組を $\{N_{i,p}^{T}(t)\}_{0 \leq i \leq K}$ で表す．ノット・ベクトルは，始端ノット t_0 および終端ノット t_{K+p+1} の多重度はともに $(p+1)$ を仮定する（いわゆる非周期的ノット・ベクトルの条件）．

$$t_0=t_1=\cdots t_p<t_{p+1}\cdots \leqq t_K<t_{K+1}=t_{K+2}=\cdots t_{K+p+1} \tag{2.1}$$

次数 $p \geqq 1$ とノット・ベクトル $T=\{t_i\}_{0 \leq i \leq K+p+1}$ から決まる B スプライン基底関数 $\{N_{i,p}^{T}(t)\}_{0 \leq i \leq K}$ により $(K+1)$ 個の制御点列をブレンドして得られる曲線

$$\boldsymbol{C}(t)=\sum_{i=0}^{K} N_{i,p}^{T}(t)\,\boldsymbol{P}_i \tag{2.2}$$

を p 次 B スプライン曲線とよぶ．

本稿では，$t_i<t_{i+1}$ なる隣接ノットで挟まれた曲線の区間をセグメント（segment）とよぶ．各セグメントで B スプライン曲線は p 次多項式曲線を表し，全体としてセグメントが連なった区分的多項式曲線となる．セグメントのつなぎ目に相当する点（ノットに対応する線上点）をセグメント分割点とよぶ．

また，u 方向の次数 $p \geqq 1$ と u 方向ノット・ベクトル $U=\{u_i\}_{0 \leq i \leq K+p+1}$ から決まる B スプライン基底関数 $\{N_{i,p}^{U}(u)\}_{0 \leq i \leq K}$, および v 方向の次数 $q \geqq 1$ と v 方向ノット・ベクトル $V=\{v_j\}_{0 \leq j \leq L+q+1}$ から決まる B スプライン基底関数 $\{N_{j,q}^{V}(v)\}_{0 \leq j \leq L}$ により，$(K+1)(L+1)$ 個の制御点網 $\{\boldsymbol{P}_{i,j}\}_{0 \leq i \leq K, 0 \leq j \leq L}$ をブレンドして得られる曲面

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{L} N_{i,p}^{U}(u) N_{j,q}^{V}(v)\,\boldsymbol{P}_{i,j} \tag{2·3}$$

を $p \times q$ 次の B スプライン曲面とよぶ．

本稿では，$u_i<u_{i+1}$ および $v_j<v_{j+1}$ なる各ノットで挟まれた（u，v）パラメタの矩形領域に対応する曲面の領域をパッチ（patch）とよぶ．各パッチで B スプライン曲面は $p \times q$ 次の多項式曲面を表し，全体としてパッチが縦横に貼り合わさった区分的多項式曲面になる．隣接パッチを分かつ面上線（ノットに対応するパラメタ一定線）をパッチ境界線とよぶ．

B スプライン曲線・曲面は，CADCEUS をはじめ多くの実用モデラで用いられている自由曲線・自由曲面の表現形式である．

B スプライン基底関数，B スプライン曲線・曲面の諸性質については，Piegl–Tiller の教科書[9]を参照されたい．

2.2　点列の 3 次 C^2 曲線補間

Gordon 面張りの考え方を説明する前に，基礎技術として，点列の曲線補間につい

て述べる．$(m+1)$ 個の点列 $\boldsymbol{Q_0}$，$\boldsymbol{Q_1}$，…，$\boldsymbol{Q_m}$ とパラメタ列 $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$ が与えられたとき，各パラメタ $t = a_i$ で与点 $\boldsymbol{Q_i}$ を通過し，両端点において，指示1階微分値（接線ベクトル）$\boldsymbol{E_0}$，$\boldsymbol{E_m}$ を持つ C^2 連続な3次のBスプライン曲線を求める問題を考える（図6）．

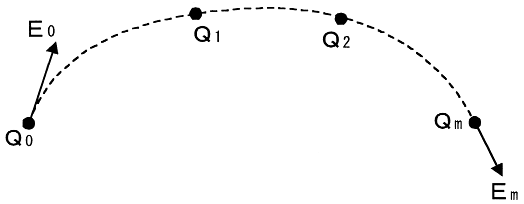


図 6　点列の3次 C^2 曲線補間

この問題は，de Boor[1]で完全スプライン補間（complete spline interpolation）とよばれ最もよく知られたスプライン補間法を適用すると，ノット・ベクトル $T = \{t_i\}_{0 \leq i \leq m+6}$

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = a_0$$
$$t_i = a_{i-3}\ （4 \leqq i \leqq m+2，中間ノットは多重度1）$$
$$t_{m+3} = t_{m+4} = t_{m+5} = t_{m+6} = a_m \tag{2.4}$$

で定まる3次のBスプライン基底関数 $\{N_{i,3}^T(t)\}_{0 \leq i \leq m+2}$ により，連立方程式

$$\sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^T(a_0)\,\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{Q_0} \qquad （始点通過）$$

$$\sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^{T\prime}(a_0)\,\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{E_0} \qquad （始点での1階微分値）$$

$$\sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^T(a_k)\,\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{Q_k} \qquad （中間点通過\ 1 \leqq k \leqq m-1）$$

$$\sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^{T\prime}(a_m)\,\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{E_m} \qquad （終点での1階微分値）$$

$$\sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^T(a_m)\,\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{Q_m} \qquad （終点通過）\tag{2.5}$$

を解いて制御点列 $\{\boldsymbol{P_i}\}$ を決定し，条件を満たす3次Bスプライン曲線

$$\boldsymbol{C}(t) = \sum_{i=0}^{m+2} N_{i,3}^T(t)\,\boldsymbol{P_i} \tag{2.6}$$

を得る．この曲線は，中間ノット多重度が1のため，中間ノット位置で C^2 連続である．

以上の解法過程は次のように見ることもできる．条件

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(a_0) & \lambda_1(a_0) & \lambda_2(a_0) & \cdots & \lambda_m(a_0) & \lambda_{m+1}(a_0) & \lambda_{m+2}(a_0) \\ \lambda_0'(a_0) & \lambda_1'(a_0) & \lambda_2'(a_0) & \cdots & \lambda_m'(a_0) & \lambda_{m+1}'(a_0) & \lambda_{m+2}'(a_0) \\ \lambda_0(a_1) & \lambda_1(a_1) & \lambda_2(a_1) & \cdots & \lambda_m(a_1) & \lambda_{m+1}(a_1) & \lambda_{m+2}(a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_0(a_{m-1}) & \lambda_1(a_{m-1}) & \lambda_2(a_{m-1}) & \cdots & \lambda_m(a_{m-1}) & \lambda_{m+1}(a_{m-1}) & \lambda_{m+2}(a_{m-1}) \\ \lambda_0'(a_m) & \lambda_1'(a_m) & \lambda_2'(a_m) & \cdots & \lambda_m'(a_m) & \lambda_{m+1}'(a_m) & \lambda_{m+2}'(a_m) \\ \lambda_0(a_m) & \lambda_1(a_m) & \lambda_2(a_m) & \cdots & \lambda_m(a_m) & \lambda_{m+1}(a_m) & \lambda_{m+2}(a_m) \end{bmatrix} = [\text{単位行列}]$$

（ここで，$\lambda_i'(a_k)$ は，$\lambda_i(t)$ の $t=a_k$ での１階微分値）　(2.7)

を満たす補間関数系 $\{\lambda_i(t)\}_{0\le i\le m+2}$ を B スプライン基底関数の１次結合

$$\lambda_i(t)=\sum_{k=0}^{m+2} N_{k,3}^T(t)\Lambda_{k,i} \tag{2.8}$$

として決定すると，

$$\boldsymbol{C}(t)=\lambda_0(t)\boldsymbol{Q_0}+\lambda_1(t)\boldsymbol{E_0}+\sum_{k=2}^{m}\lambda_k(t)\boldsymbol{Q_{k-1}}+\lambda_{m+1}(t)\boldsymbol{E_m}+\lambda_{m+2}(t)\boldsymbol{Q_m} \tag{2.9}$$

により，(2.6) と同じ曲線が表現できる．

点列の３次 C^2 曲線補間を式 (2.9) のように定式化するのは，石田氏の論文[6]に触発された本稿での工夫である．３次 C^2 曲線補間の本質が，通常の B スプライン曲線表現 (2.6) に比べ，わかりやすくなっていると筆者らは考えている．ここで，条件 (2.7) を満たす補間関数系 $\{\lambda_i(t)\}_{0\le i\le m+2}$ は，Coons の３次ブレンディング関数（３次 Hermite 補間関数）を一般化したものと考えることができる．この補間関数系に対して，世の中一般で認知されている名称を筆者らは知らないが，本稿では便宜のため，パラメタ列 $\{a_i\}$ に関する「３次の C^2 ブレンディング関数」とよぶことにしたい．

2.3　単方向曲線群の３次 C^2 曲面補間

以上の点列の補間は，各通過点が単方向（v 方向）の拘束線群 $\{\boldsymbol{V}_i(v)\}_{0\le i\le m}$ であり，各々を u パラメタ一定値 $u=a_i$ のパラメタ一定線 $\boldsymbol{S}_1(a_i,v)$ として通るような曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$ の補間に容易に一般化される．但し，端での接線ベクトル拘束条件は，端の曲線 $\boldsymbol{V}_0(v),\boldsymbol{V}_m(v)$ に沿って，曲面の境界横断方向（u 方向）接ベクトルを与える１階導関数（境界横断導関数，Cross Boundary Derivative，略して CBD とよぶ），$\boldsymbol{E}_0(v)$，$\boldsymbol{E}_m(v)$ に置き換わる．端曲線で接続する周辺面群が与えられている場合には，これらの CBD を周辺面の接平面と滑らかに接続するように指定すれば，周辺面群と補間曲面との G^1 接続が実現できる（図 7）．

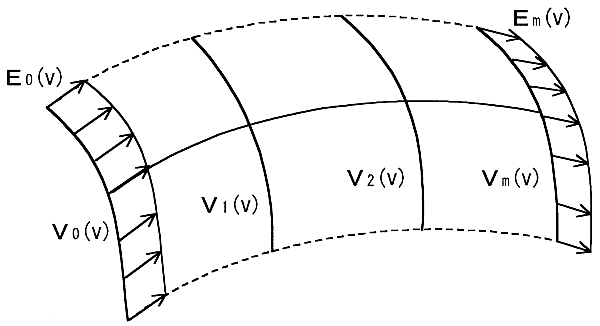


図 7　単方向曲線群の３次 C^2 曲面補間

パラメタ列 $\{a_i\}$ に関する 3 次の C^2 ブレンディング関数 $\{\lambda_i(u)\}_{0\leq i\leq m+2}$ を用いて，u 方向の補間曲面は，(2.9) の $\boldsymbol{Q}_i$ を $\boldsymbol{V}_i(v)$ で，$\boldsymbol{E}_i$ を $\boldsymbol{E}_i(v)$ で置き換え

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1(u,v)=\lambda_0(u)\boldsymbol{V}_0(v)+\lambda_1(u)\boldsymbol{E}_0(v)+\sum_{k=2}^{m}\lambda_k(u)\boldsymbol{V}_{k-1}(v)\\+\lambda_{m+1}(u)\boldsymbol{E}_m(v)+\lambda_{m+2}(u)\boldsymbol{V}_m(v)\end{aligned}\tag{2.10}$$

として表される．この補間曲面は，次の拘束条件を満たす．

$$\mathbf{S}_1(a_i,v)=\boldsymbol{V}_i(v)\qquad(0\leqq i\leqq m)$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}_1}{\partial u}(a_0,v)=\boldsymbol{E}_0(v)$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}_1}{\partial u}(a_m,v)=\boldsymbol{E}_m(v)\tag{2.11}$$

全く同様に，u 方向の $(n+1)$ 本の拘束線群 $\{\boldsymbol{U}_j(n)\}_{0\leq j\leq n}$ とパラメタ列 $b_0<b_1<\cdots<b_n$ を与えて，各々を v パラメタ一定線 $\mathbf{S}_2(u,b_j)$ として通るような曲面 $\mathbf{S}_2(u,v)$ の補間も考えられる．今度は，端で v 方向の CBD $\boldsymbol{F}_0(u)$，$\boldsymbol{F}_n(u)$ を拘束条件として与える．

パラメタ列 $\{b_j\}$ に関する 3 次の C^2 ブレンディング関数 $\{\mu_j(v)\}_{0\leq j\leq n+2}$ を用いて v 方向の補間曲面は

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_2(u,v)=\mu_0(v)\boldsymbol{U}_0(u)+\mu_1(v)\boldsymbol{F}_0(u)+\sum_{k=2}^{n}\mu_k(v)\boldsymbol{U}_{k-1}(u)+\\+\mu_{n+1}(v)\boldsymbol{F}_n(u)+\mu_{n+2}(v)\boldsymbol{U}_n(u)\end{aligned}\tag{2.12}$$

として表される．この補間曲面は，次の拘束条件を満たす．

$$\mathbf{S}_2(u,b_j)=\boldsymbol{U}_j(u)\qquad(0\leqq j\leqq n)$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}_2}{\partial v}(u,b_0)=\boldsymbol{F}_0(u)$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}_2}{\partial v}(u,b_n)=\boldsymbol{F}_n(u)\tag{2.13}$$

2.4 Gordon 面

いよいよ，メッシュ面で想定されるように u,v 両方向の拘束線群と，4 本の外郭拘束線に沿った CBD が与えられた場合の曲面補間を考えよう．

まず，主方向（u 方向）の $(n+1)$ 本の線群

$\boldsymbol{U}_0(u)$，$\boldsymbol{U}_1(u),\cdots$，$\boldsymbol{U}_n(u)$

と従方向（v 方向）の $(m+1)$ 本の線群

$\boldsymbol{V}_0(v)$，$\boldsymbol{V}_1(v),\cdots$，$\boldsymbol{V}_m(v)$

を通過すべき拘束線群として与える．ここで，j 番目の u 方向拘束線 $\boldsymbol{U}_j(u)$ と i 番目の v 方向拘束線 $\boldsymbol{V}_i(v)$ とは，交点 $\boldsymbol{Q}_{i,j}$ を持つことを要請する．また，u あるいは v 方向に対応する交点は，各線の同一パラメタの線上点になるように各線のパラメタ付けが整合しているとする．すなわち，u 方向のパラメタ増大列 $a_0<a_1<\cdots<a_m$ と v 方向のパラメタ増大列 $b_0<b_1<\cdots<b_n$ により，

$$\boldsymbol{Q}_{i,j}=\boldsymbol{U}_j(a_i)=\boldsymbol{V}_i(b_j) \tag{2.14}$$

となっているとする．このように交点位置が整合するようにパラメタ付けされた線群を整合線群とよび，このときのパラメタ列を整合パラメタ列とよぶ．

次に，4 つの面境界線（外郭拘束線）に沿った CBD

$u=a_0$ 面境界線に沿った方向の CBD　$\boldsymbol{E}_0(v)$,

$u=a_m$ 面境界線に沿った方向の CBD　$\boldsymbol{E}_m(v)$,

$v=b_0$ 面境界線に沿った方向の CBD　$\boldsymbol{F}_0(u)$,

$v=b_n$ 面境界線に沿った方向の CBD　$\boldsymbol{F}_n(u)$

を指定する．これらの CBD は，拘束線端点の接線ベクトルとの整合条件

$$\frac{d\,\boldsymbol{U}_j}{du}(a_0)=\boldsymbol{E}_0(b_j)\qquad (=\boldsymbol{E}_{0,j}\text{ とおく})\qquad (0\leqq j\leqq n)$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{U}_j}{du}(a_m)=\boldsymbol{E}_m(b_j)\qquad (=\boldsymbol{E}_{m,j}\text{ とおく})\qquad (0\leqq j\leqq n)$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{V}_i}{dv}(b_0)=\boldsymbol{F}_0(a_i)\qquad (=\boldsymbol{F}_{i,0}\text{ とおく})\qquad (0\leqq i\leqq m)$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{V}_i}{dv}(b_n)=\boldsymbol{F}_n(a_i)\qquad (=\boldsymbol{F}_{i,n}\text{ とおく})\qquad (0\leqq i\leqq m) \tag{2.15}$$

および，面の 4 隅でのツイスト整合条件

$$\frac{d\,\boldsymbol{E}_0}{dv}(b_0)=\frac{d\,\boldsymbol{F}_0}{du}(a_0)\qquad (=\boldsymbol{T}_{0,0}\text{ とおく})$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{E}_0}{dv}(b_n)=\frac{d\,\boldsymbol{F}_n}{du}(a_0)\qquad (=\boldsymbol{T}_{0,n}\text{ とおく})$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{E}_m}{dv}(b_0)=\frac{d\,\boldsymbol{F}_0}{du}(a_m)\qquad (=\boldsymbol{T}_{m,0}\text{ とおく})$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{E}_m}{dv}(b_n)=\frac{d\,\boldsymbol{F}_n}{du}(a_m)\qquad (=\boldsymbol{T}_{m,n}\text{ とおく}) \tag{2.16}$$

を満たすように与えられなければならない（$\boldsymbol{T}_{*,*}$ はツイスト・ベクトルとよばれる）．

ツイスト整合条件は Coons 面と同様に面の 4 隅で

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{S}}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2\boldsymbol{S}}{\partial v\,\partial u} \tag{2.17}$$

が成り立つように要請する条件（積分可能条件）である．

このとき，パラメタ列 $\{a_i\}$ から定まる u 方向の 3 次 C^2 ブレンディング関数を $\{\lambda_i(u)\}$，パラメタ列 $\{b_j\}$ から定まる v 方向の 3 次 C^2 ブレンディング関数を $\{\mu_j(v)\}$ として，u 方向補間曲面を（2.10）と同様に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_1(u,v)=&\lambda_0(u)\,\boldsymbol{V}_0(v)+\lambda_1(u)\boldsymbol{E}_0(v)+\sum_{k=2}^{m}\lambda_k(u)\,\boldsymbol{V}_{k-1}(v)\\&+\lambda_{m+1}(u)\,\boldsymbol{E}_m(v)+\lambda_{m+2}(u)\,\boldsymbol{V}_m(v)\end{aligned} \tag{2.18}$$

および v 方向補間曲面を（2.12）と同様に

$$\boldsymbol{S}_2(u,v)=\mu_0(v)\,\boldsymbol{U}_0(u)+\mu_1(v)\,\boldsymbol{F}_0(u)+\sum_{k=2}^{n}\mu_k(v)\,\boldsymbol{U}_{k-1}(u)+$$

$$+\mu_{n+1}(v)\boldsymbol{F}_n(u)+\mu_{n+2}(v)\boldsymbol{U}_n(u) \tag{2.19}$$

で定義する．さらに，拘束線交点 $\boldsymbol{Q}_{*,*}$，端点接線ベクトル $\boldsymbol{E}_{*,*}$，$\boldsymbol{F}_{*,*}$，面 4 隅のツイスト・ベクトル $\boldsymbol{T}_{*,*}$ の離散データ群を補間する第 3 の曲面を

$$\boldsymbol{S}_3(u,v)=[\lambda_0(u)\quad \lambda_1(u)\quad \lambda_2(u)\quad \cdots\quad \lambda_m(u)\quad \lambda_{m+1}(u)\quad \lambda_{m+2}(u)]\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{0,0} & \boldsymbol{F}_{0,0} & \boldsymbol{Q}_{0,1} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{0,n-1} & \boldsymbol{F}_{0,n} & \boldsymbol{Q}_{0,n} \\ \boldsymbol{E}_{0,0} & \boldsymbol{T}_{0,0} & \boldsymbol{E}_{0,1} & \cdots & \boldsymbol{E}_{0,n-1} & \boldsymbol{T}_{0,n} & \boldsymbol{E}_{0,n} \\ \boldsymbol{Q}_{1,0} & \boldsymbol{F}_{1,0} & \boldsymbol{Q}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{1,n-1} & \boldsymbol{F}_{1,n} & \boldsymbol{Q}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{m-1,0} & \boldsymbol{F}_{m-1,0} & \boldsymbol{Q}_{m-1,1} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{m-1,n-1} & \boldsymbol{F}_{m-1,n} & \boldsymbol{Q}_{m-1,n} \\ \boldsymbol{E}_{m,0} & \boldsymbol{T}_{m,0} & \boldsymbol{E}_{m,1} & \cdots & \boldsymbol{E}_{m,n-1} & \boldsymbol{T}_{m,n} & \boldsymbol{E}_{m,n} \\ \boldsymbol{Q}_{m,0} & \boldsymbol{F}_{m,0} & \boldsymbol{Q}_{m,1} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{m,n-1} & \boldsymbol{F}_{m,n} & \boldsymbol{Q}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_0(v) \\ \mu_1(v) \\ \mu_2(v) \\ \vdots \\ \mu_n(v) \\ \mu_{n+1}(v) \\ \mu_{n+2}(v) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

とする．このとき，次式で定義される曲面

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{S}_1(u,v)+\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v) \tag{2.21}$$

を Gordon 面という（図 8）．

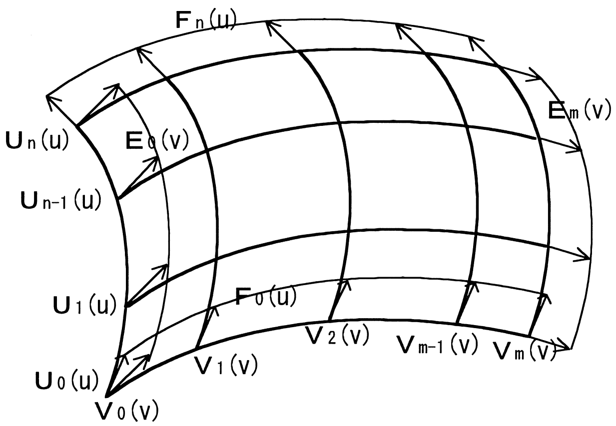


図 8　Gordon 面

定義式（2.21）は，次のように書き直すとわかりやすい．

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{S}_3(u,v)+(\boldsymbol{S}_1(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v))+(\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v)) \tag{2.22}$$

式（2.22）は，離散データ補間曲面 $\boldsymbol{S}_3(u,v)$ を基準として，v 方向拘束線群を通過するための変異量 $(\boldsymbol{S}_1(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v))$ と，u 方向拘束線群を通過するための変異量 $(\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v))$ を見込んだものが Gordon 面であると読める．

Gordon 面は，拘束線群をパラメター定線として通る以外に，境界に沿って与えられた CBD 拘束条件を満たす．すなわち，

$$\boldsymbol{S}(a_i,v)=\boldsymbol{V}_i(v)\qquad (0\leqq i\leqq m)$$

$$\boldsymbol{S}(u,b_j)=\boldsymbol{U}_j(u)\qquad (0\leqq j\leqq n)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(a_0,v)=\boldsymbol{E}_0(v)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(a_m, v) = \boldsymbol{E}_m(v)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, b_0) = \boldsymbol{F}_0(u)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, b_n) = \boldsymbol{F}_n(u) \tag{2.23}$$

が成り立つ.

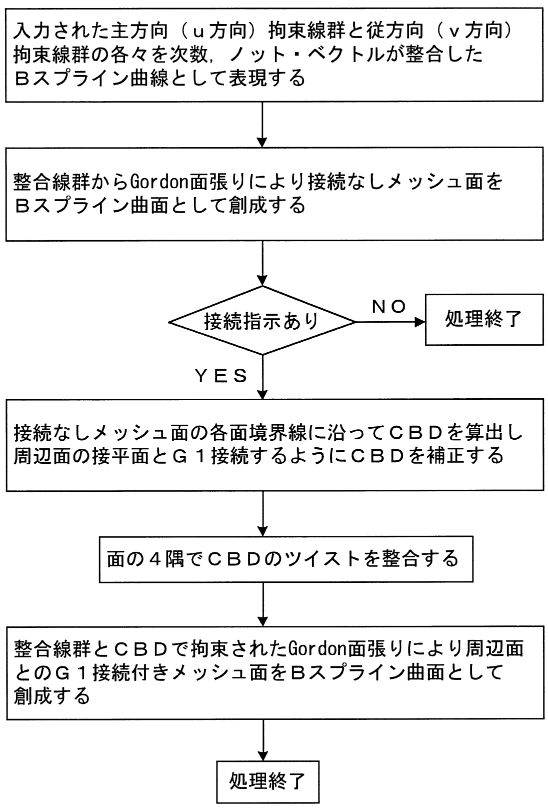
Gordon 面は，定義式（2.21）に見られるように，通過拘束線と CBD という与えられた拘束条件のみから面形状が決まることが大きな利点である．中間通過線はいっさい補充する必要がない．また，通過拘束線と CBD が滑らかであれば面も滑らかになることが理論的に保証されている点もすぐれた点である.

なお，教科書[9]などで普通説明されている Gordon 面は，CBD 拘束のない場合である．CBD 拘束のない Gordon 面は，次章の接続なしメッシュ面創成に使用するので，付録 1 に説明する.

3. 新『メッシュ面創成』コマンドのアルゴリズム

3.1 アルゴリズム概要

今回実装した新しい『メッシュ面創成』コマンドのアルゴリズム概要は次の通りである.



各処理の要点を次節以降で説明する．

3.2　入力線群の整合

入力される主従の各拘束線のパラメタ付けは，一般に全く独立であるから，条件(2.14）を満たすように，u 方向，v 方向ごとに（向きも含め）パラメタ付けを整合する必要がある．この処理は，入力線の近似を伴う再当てはめ（refitting）処理であり，本稿では「切り直し」とよぶ．

今回は，C^1 連続な 3 次 B スプライン曲線として切り直す方法を採用した．

1）　線群の各交点における共通パラメタ付け

u 方向(v 方向)に対応する 3 次 B スプライン曲線群の共通パラメタ付けに関して，今回，「平均速度準単位化法」と名付ける新しい試みを行った．この手法は，弧長パラメタ付け（＝単位平均速度）を理想とし，単位平均速度からの二乗偏差を最小にする手法である．

まず，2 線の始終点パラメタを統一する場合を例に説明する．

向き付けのそろった 2 線 $\boldsymbol{U}_1(s)$，$\boldsymbol{U}_2(t)\,(0 \leqq s \leqq se,\ 0 \leqq t \leqq te)$ が与えられたとき，これらを共通のパラメタ付け $0 \leqq u \leqq \tilde{u}$ で表現することを考える．ここで，新しいパラメタ付けは各線について弧長パラメタ付けにできるだけ近いパラメタにしたい．

$\boldsymbol{U}_1(s)$，$\boldsymbol{U}_2(t)$ それぞれの弧長を，l_1，l_2 とする．新しいパラメタでの平均速度は，$\dfrac{l_1}{\tilde{u}}$，$\dfrac{l_2}{\tilde{u}}$ である．

弧長パラメタ付けであれば，平均速度は単位速度 1 に等しいはずであるが，2 線の弧長が異なる場合，共通パラメタでは平均速度 1 を同時に達成できない．そこで，平均速度 1 が理想の姿であるとし，それからの二乗偏差

$$F(\tilde{u}) = \left(\frac{l_1}{\tilde{u}} - 1\right)^2 + \left(\frac{l_2}{\tilde{u}} - 1\right)^2 \tag{3.1}$$

を最小にする $\tilde{u}$ を決定する．これは次のように求められる．

$$\frac{dF}{d\tilde{u}} = 2\left(\frac{l_1}{\tilde{u}} - 1\right)\left(-\frac{l_1}{\tilde{u}^2}\right) + 2\left(\frac{l_2}{\tilde{u}} - 1\right)\left(-\frac{l_2}{\tilde{u}^2}\right) = \frac{-2\{l_1(l_1 - \tilde{u}) + l_2(l_2 - \tilde{u})\}}{\tilde{u}^3} \tag{3.2}$$

より，(3.1）を最小にする $\tilde{u}$ は，(3.2）を 0 にする解として，

$$\tilde{u} = \frac{(l_1)^2 + (l_2)^2}{l_1 + l_2} \tag{3.3}$$

で決定される．

この考え方を u 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{U}_j(s_j)\}_{0 \leq j \leq n}$ の共通パラメタ付けに適用する．j 番目の u 方向拘束線が $(i-1)$ 番目の v 方向拘束線と i 番目の v 方向拘束線（ここで，$1 \leqq i \leqq m$）との各交点で挟まれる区間の弧長を $l_{j,i}$ とすると，この区間の共通パラメタ幅 $\tilde{u}_i$ は，(3.3）を一般個数に拡張した式

$$\tilde{u}_i = \frac{\sum_{j=0}^{n} (l_{j,i})^2}{\sum_{j=0}^{n} l_{j,i}} \tag{3.4}$$

として算出される．この共通パラメタ幅を累積して共通パラメタ付けを定める．すなわち，

$a_0 = 0,$

$$a_1 = \tilde{u}_1,$$
$$a_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2,$$
$$\cdots$$
$$a_m = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \cdots + \tilde{u}_m \tag{3.5}$$

により u 方向の共通パラメタ列 $\{a_i\}$ が定義される．

v 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{V}_i(t_i)\}_{0 \le i \le m}$ の共通パラメタ付けも同様である．

2） 途中通過パラメタ拘束付き曲線切り直し

前項の手法により，各交点位置での途中通過パラメタが定まった．曲線切り直し処理の目標は

各交点位置を共通のパラメタで通過し，かつ，元の曲線形状と指定許容誤差以内の形状を持つ曲線を作ること

である．これは次のようなフィードバック・ループにより実現される．

a） まず，通過点のパラメタを拘束した C^1 曲線当てはめにより近似線を作成する．C^1 曲線当てはめの際の各通過点での座標値と単位接線ベクトルは，元の曲線の座標値と単位接線ベクトルを使用する．

b） 元の曲線と近似後の線の離れを検査する．

c） 許容誤差以上の離れが検出された場合は，その位置を全ての対応曲線（u 方向なら全ての u 方向曲線）について通過点に昇格させ，その位置のパラメタをノットベクトルに追加して，a）の処理に戻る．離れが検出されなかった場合は，処理を終了する．

こうして，2.4 節の前提を満たす整合線群が，両方向について得られる．

3.3 接続なしでのメッシュ面創成

まず，周辺面群との接続を考慮しないメッシュ面を CBD 拘束のない Gordon 面張りで創成する（付録 1 参照）．接続なし面を最初に創成するのは，接続指示がない場合のため，および接続指示がある場合に G^1 接続補正の基準となる CBD を作成するためである．

Gordon 面張りに使用する補間関数（次数≦2 なら 3 次に次数上げしておく）のノット・ベクトルと，拘束線の持つノット・ベクトルをマージすることにより，接続なし Gordon 面を 3×3 次 B スプライン曲面表現することができる．

$$\boldsymbol{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{K} \sum_{j=0}^{L} N_{i,3}^{U}(u) N_{j,3}^{V}(v) \boldsymbol{P}_{i,j} \tag{3.6}$$

こうして，接続なしメッシュ面が得られる．

3.4 接続ありでの CBD 補正

まず，接続なしメッシュ面（3.6）の各面境界線に沿った CBD を算出する．

$$\boldsymbol{E}_0(v) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(a_0, v), \qquad \boldsymbol{E}_m(v) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(a_m, v) \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{F}_0(u) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, b_0), \qquad \boldsymbol{F}_n(u) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, b_n) \tag{3.8}$$

これらは，面境界を構成する B スプライン曲線とその 1 列内側の制御点列から決まる B スプライン曲線との差の定数倍として表される．例えば，$u = a_0$ 境界線沿い

の CBD は,

$$\boldsymbol{E}_0(v)=\left(\frac{3}{u_4-a_0}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{L}N_{k,3}^{V}(v)(\boldsymbol{P}_{1,k}-\boldsymbol{P}_{0,k})\right) \tag{3.9}$$

ゆえ,

$$\boldsymbol{D\ V}_0(v)=\sum_{k=0}^{L}N_{k,3}^{V}(v)\boldsymbol{P}_{1,k} \tag{3.10}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{E}_0(v)=\left(\frac{3}{u_4-a_0}\right)\cdot(\boldsymbol{D\ V}_0(v)-\boldsymbol{V}_0(v)) \tag{3.11}$$

と表される．同様に，他の1列内側の制御点列から決まるBスプライン曲線 $\boldsymbol{D\ V}_m(v)$，$\boldsymbol{D\ U}_0(u)$，$\boldsymbol{D\ U}_n(u)$ を用いると,

$$\boldsymbol{E}_m(v)=\left(\frac{3}{a_m-u_K}\right)\cdot(\boldsymbol{V}_m(v)-\boldsymbol{D\ V}_m(v)) \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{F}_0(u)=\left(\frac{3}{v_4-b_0}\right)\cdot(\boldsymbol{D\ U}_0(u)-\boldsymbol{U}_0(u)) \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{F}_n(u)=\left(\frac{3}{b_n-v_L}\right)\cdot(\boldsymbol{U}_n(u)-\boldsymbol{D\ U}_n(u)) \tag{3.14}$$

を得る．曲線 $\boldsymbol{D\ V}_0(v)$，$\boldsymbol{D\ V}_m(v)$，$\boldsymbol{D\ U}_0(u)$，$\boldsymbol{D\ U}_n(u)$ は面上線ではないが，各面境界線に沿っての曲面の傾き（スロープ）を制御する曲線という意味でスロープ制御曲線とよぶ（図 9）.

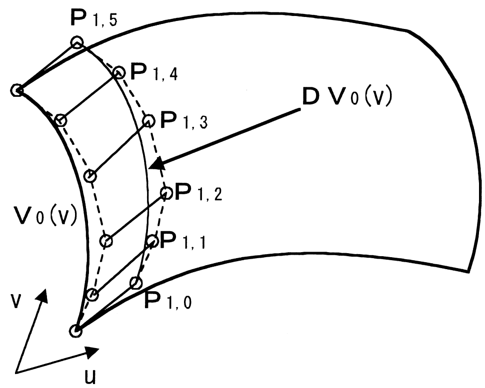


図 9　スロープ制御曲線

周辺面と G^1 接続するように CBD を補正する処理は，対応するスロープ制御曲線の補正により実現する．すなわち，各境界線について，周辺面との折れ検査位置（今回はノット位置と中間 3 等分位置）での曲面の法線と周辺面の法線との折れを検査する．折れているなら，スロープ制御曲線上の点を周辺面接平面に投影し，必要なノット挿入を行って補間し直す．周辺面との折れが必要精度以内になるまでスロープ制御曲線の修正を繰り返す.

スロープ制御曲線が確定したら，対応する面境界線および，その他の拘束線にも同

様のノット挿入を行い，整合化しておく．

3.5　ツイスト整合

以上の処理によって，各面境界線ごとに独立に周辺面と G^1 接続する CBD が得られたが，面の 4 隅で u 方向 CBD と v 方向 CBD が矛盾している可能性がある．すなわち，面の 4 隅でツイスト整合条件（2.17）が成り立たないという状況が起き得る．この現象をツイスト不整合とよぶ．

ツイスト不整合を制御点の言葉で述べると次のようになる．例えば，$u=a_0$，$v=b_0$ の隅点において，$u=a_0$ 境界に沿った CBD である $\boldsymbol{E}_0(v)$ から決まる制御点 $\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)}$ と $v=b_0$ 境界に沿った CBD である $\boldsymbol{F}_0(u)$ から決まる制御点 $\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}$ が一致しないとき，この隅点でのツイスト不整合が発生する（図 10）．

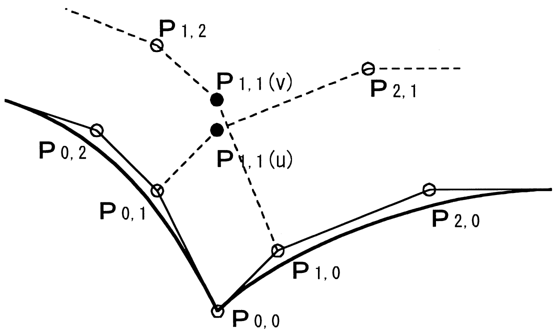


図 10　ツイスト不整合

これらの差は，面の 4 隅に近接するノットを挿入すると小さくなるが，どのあたりに挿入すればよいかの基準が欲しい．周辺面群との接平面折れを許容誤差以内にしてツイストを整合させるようなノット挿入位置の基準に関して，松木一木村両氏の研究がある[8]．今回の実装では，松木一木村理論を参考に面の 4 隅近傍に多重度 2 のノットを挿入し，ツイスト整合条件（2.16）を満たす CBD を与えるようなスロープ制御曲線を構成している（付録 2 参照）．

ツイスト整合済みのスロープ制御曲線が確定したら，対応する面境界線および，その他の拘束線にも同様のノット挿入を行い，整合化しておく．

3.6　接続ありでのメッシュ面創成

必要な箇所のノット挿入処理によって，

- u 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{U}_j(u)\}$ と v 方向 CBD $\boldsymbol{F}_0(u)$，$\boldsymbol{F}_n(u)$ は，共通の B スプライン基底関数 $\{N_{i,3}^U(u)\}$ で展開でき，
- v 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{V}_i(v)\}$ と u 方向 CBD $\boldsymbol{E}_0(v)$，$\boldsymbol{E}_m(v)$ は，共通の B スプライン基底関数 $\{N_{j,3}^V(v)\}$ で展開できる

ようになる．また，各方向の 3 次 C^2 ブレンディング関数 $\{\lambda_i(u)\}$，$\{\mu_j(v)\}$ も同様である．

こうして，2.4 節の方法で定義される CBD 拘束付き Gordon 面

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{S}_1(u,v)+\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v) \tag{3.15}$$

から，最終的な接続ありメッシュ面の 3×3 次 B スプライン曲面表現

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{L}N_{i,3}^{U}(u)N_{j,3}^{V}(v)\boldsymbol{P}_{i,j} \tag{3.16}$$

が得られる．

4. 面の接続性と断面線の曲率評価

本章では，周辺面群との G^1 接続性評価および断面線曲率評価の観点から新旧メッシュ面の比較を行う．

まず，データ 1（図 11）は主方向拘束線 2 本と従方向拘束線 3 本，および外郭沿いの周辺面 4 面の場合である．中央の従方向拘束線は高く盛り上がっている．

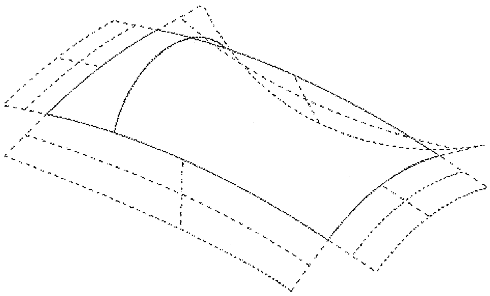


図 11　データ 1：拘束線群と周辺面群

これらの拘束線群から，旧メッシュ面で創成した面を図 12 に示す（面形状を確認しやすいようにパラメタ一定線を表示している）．旧メッシュ面には，G^1 接続機能がないので，従方向の外郭線に沿って周辺面（特に左側の周辺面）と折れが発生しているのが一目瞭然である．

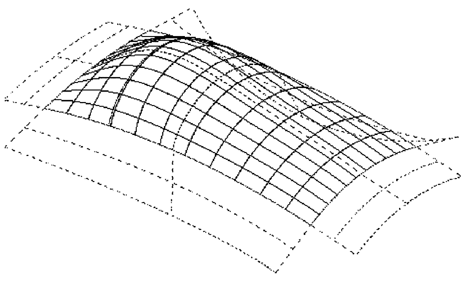


図 12　データ 1：旧メッシュ面（接続なし）

これに対し，周辺面群との接続を指示して新メッシュ面で創成した面を図 13 に示す．周辺面と滑らかに接続していることがわかる．

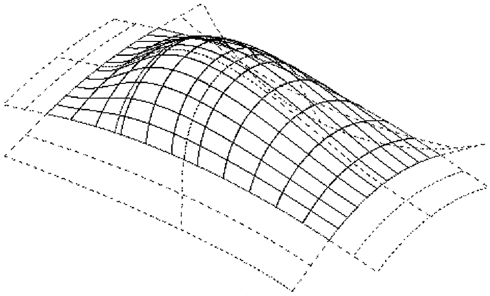


図 13　データ 1：新メッシュ面（接続あり）

次に，データ 2（図 14）は，シャンプーの容器（の半分）を想定した線群データである．主・従ともに拘束線は 3 本ずつ指示されている．周辺面群としては，底面（平面），首部分と接続するためのタブシル面，反対側とミラー接続するためのタブシル面が与えられている．

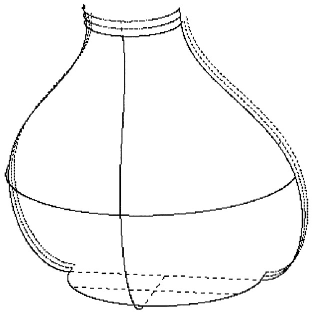


図 14　データ 2：拘束線群と周辺面群

図 15 は，旧メッシュ面で創成した面およびミラー・コピーで反対側を補った面である．

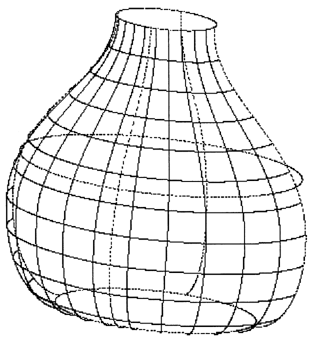


図 15　データ 2：旧メッシュ面（接続なし）

図 16 は，周辺面との G^1 接続を指示して新メッシュ面で創成した面およびミラー・

コピーで反対側を補った面である．新旧メッシュ面には一見差異がないように見える．

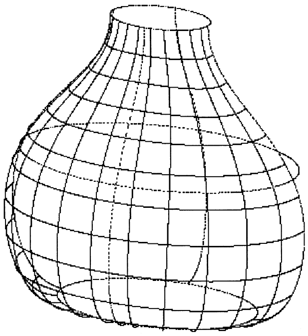


図 16　データ 2：新メッシュ面（接続あり）

そこで，容器の中心軸に直交する平面で切断した断面線の曲率半径分布を評価したものが図 17 である．旧メッシュ面ではミラー・コピー面との接続部で折れがあることがわかる．新メッシュ面では滑らかに接続されている．また，全体に新メッシュ面では曲率分布がそろっており，面品質が向上していることが見て取れる．

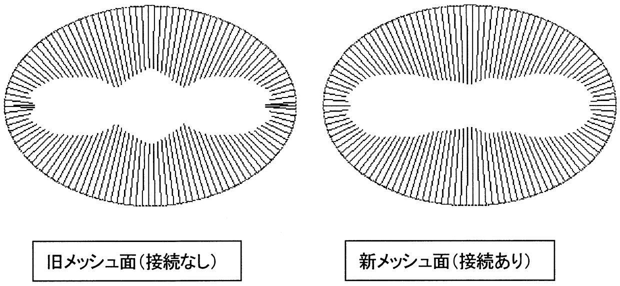


図 17　データ 2：断面形状の比較

最後のデータ 3（図 18）は，旧メッシュ面で面品質上の問題が指摘されていたケースである．主拘束線の一方は直線状，他方は sin 曲線状をしている．5 本の従拘束線は円弧形状である．接続する周辺面は指示されていない．

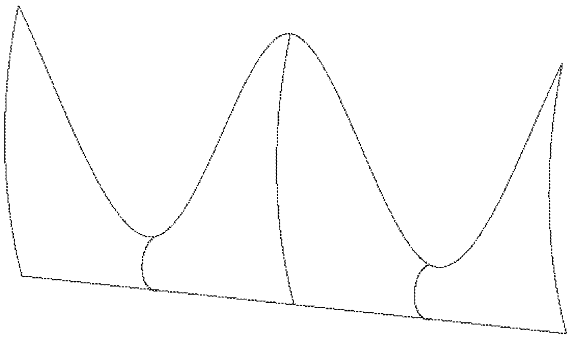


図 18　データ 3：拘束線群

旧メッシュ面で創成した面および直線拘束線に直交する切断平面での断面線の曲率半径分布を図 19 に示す．くびれの付近で曲率中心が反転し，断面形状が S 字状になっていることがわかる．

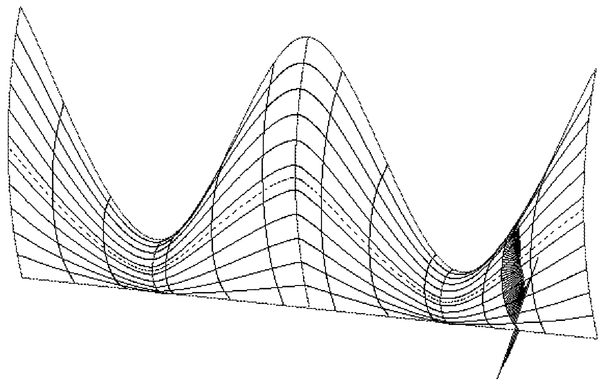


図 19　データ 3：旧メッシュ面（断面線の曲率半径分布）

新メッシュ面で接続なし指示にて創成した面を図 20 に示す．同じ位置に断面線を作成し曲率半径分布を表示すると曲率中心の反転が解消されていることがわかる．

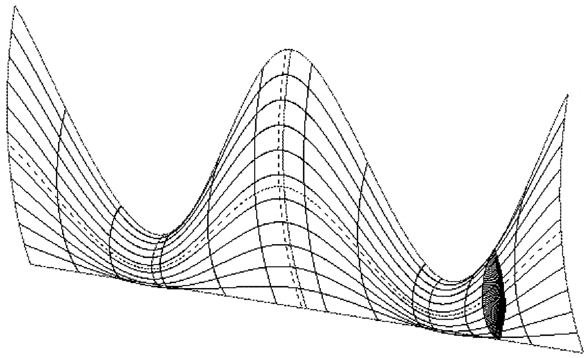


図 20　データ 3：新メッシュ面（断面線の曲率半径分布）

このように，新メッシュ面では面品質の向上も図ることができた．これは大域的補間アルゴリズムによる効果である．

5.　残された課題

今回のメッシュ面の実装で残された課題について述べる．

5.1　補間関数の連続性向上

今回の実装で使用された補間関数は，「3 次の C^2 ブレンディング関数」であり，連続性は C^2 連続である．今回のように最終的に C^1 連続な曲面創成には，C^2 連続な補間関数で十分であるが，C^2 以上の連続性が要求される場面では，高次の補間関数を用いて連続性を高める必要がある．

そのための一般理論は石田論文[6]で展開されている．

5.2 周期的拘束線群への対応

今回は，第 2 章の最初に仮定したように非周期的ノット・ベクトルの条件を満たす B スプライン基底関数を使用した．しかし，パイプ形状の面などを扱えるようにするには, 円形状に代表される周期的な拘束線群にも対応する必要がある．このためには, 周期的ノット・ベクトル（Piegl–Tiller[9]第 12 章参照）を持つ B スプライン基底関数を用いた補間を行う必要がある．

5.3 高次入力線の切り直し

今回は，入力線を 3 次 B スプライン曲線に近似する切り直し処理を実装したが, 意匠的な意図を持った高次（4 次以上）曲線は，可能な限り高次のままで処理するのが望ましい．また，連続性に関しても，拘束線が高い連続性を持つなら，それを維持することが望ましい．これを実現するための実装技術は，最小二乗法である（Piegl–Tiller[9]第 9 章参照)．

5.4 有理 B スプライン曲面の創成

今回は，いわゆる NURBS（有理 B スプライン）曲面[9]としてのメッシュ面創成を断念した．NURBS 曲線・曲面は分数式の形の表現である．拘束線群が NURBS 曲線として与えられる場合，Gordon 面は拘束線を補間関数でブレンドした表現なので, NURBS 曲面表現するためには分母を通分する必要がある．しかし，拘束線数が多くなると， 単純な分母の通分では次数が爆発して実用にならない． Lin–Hewitt[7]では, 近似により NURBS 曲面表現しているが，NURBS の優位性が近似なしに曲線・曲面を表現できることにあることを考えると決定版とは言い難い．Gordon 面の NURBS 曲面表現は，大きな break through がないと困難な課題である．

5.5 周辺面群との G^2 接続

今回の周辺面群との接続は，接平面が滑らかに接続する G^1 接続である．これに加えて，周辺面群との曲率まで滑らかに接続させるのを G^2 接続とよぶ．さらなる高品質な面への要望の高まりから，最近，G^2 接続に関するユーザからの問い合わせが, われわれ開発部署に寄せられるようになってきている．

G^1 接続では本稿で見たように，スロープ制御曲線として面境界の 1 列内側の制御点列から定まる曲線を制御し，面の 4 隅でのツイスト整合をとればよかった．これに対し G^2 接続では，2 列内側の制御点列から定まる曲線（曲率制御曲線）も制御対象とし，さらに 2 階微分が関係した G^2 ツイスト（面の隅ごとに 3 つのベクトル）も整合しなければならない．これらに関して論文として公表された研究は筆者らの知る限りまだない．研究から始める必要がある．

6. お わ り に

本稿では,「周辺面群との G^1 接続あり/なし」メッシュ面を B スプライン曲面表現された Gordon 面として実現する実装技術について報告した．Gordon 面張りの理論はメッシュ面以外にも面変形・点群面張りなどへの広い応用がある[6]. 本稿では, Gordon 面の考え方を平易に解説することに努めたつもりである．Gordon 面の利用が CAD 幾何処理に関心を持つ多くの技術者ならびに研究者の方々に普及することを望

んでいる．

論文[6]の発表前 preprint 段階から，B スプライン補間理論と Gordon 面に関しご教示くださった(株)トヨタソフトエンジニアリングの石田順二氏に感謝したい．

付　録

付録 1　CBD 拘束なし Gordon 面

本文 2.4 節で省略した CBD 拘束なし Gordon 面の定義について解説する．

CBD 拘束なし Gordon 面張りの入力は，u 方向の $(n+1)$ 本の通過拘束線群

$$\boldsymbol{U}_0(u),\ \boldsymbol{U}_1(u),\cdots,\ \boldsymbol{U}_n(u)$$

と v 方向の $(m+1)$ 本の通過拘束線群

$$\boldsymbol{V}_0(v),\ \boldsymbol{V}_1(v),\cdots,\ \boldsymbol{V}_m(v)$$

のみである（外郭拘束線沿いの CBD は与えない）．但し，本文でも述べたように，j 番目の u 方向拘束線 $\boldsymbol{U}_j(u)$ と i 番目の v 方向拘束線 $\boldsymbol{V}_i(v)$ とは，交点 $\boldsymbol{Q}_{i,j}$ を持ち，さらに，u あるいは v 方向に対応する交点列は，各線の同一パラメタの線上点になるように各線のパラメタ付けが整合していることを要請する．すなわち，u 方向のパラメタ増大列 $a_0<a_1<\cdots<a_m$ と v 方向のパラメタ増大列 $b_0<b_1<\cdots<b_n$ により，

$$\boldsymbol{Q}_{i,j}=\boldsymbol{U}_j(a_i)=\boldsymbol{V}_i(b_j) \qquad \text{(A 1.1)}$$

となっているとする．パラメタ列 $\{a_i\}$ および $\{b_j\}$ を整合パラメタ列とよぶ．

以上の入力に対して，各拘束線を整合パラメタ位置でのパラメタ一定線として通過する

$$\boldsymbol{S}(a_i,v)=\boldsymbol{V}_i(v) \qquad (0\leqq i\leqq m)$$
$$\boldsymbol{S}(u,b_j)=\boldsymbol{U}_j(u) \qquad (0\leqq j\leqq n) \qquad \text{(A 1.2)}$$

曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$ を求めるのが CBD 拘束なし Gordon 面張りである．なお，通常，Gordon 面という場合は，CBD 拘束なし Gordon 面を指す場合が多い．

まず，u 方向の補間関数系 $\{\phi_i(u)\}_{0\leq i\leq m}$ を u 方向の各整合パラメタ a_i でのみ関数値 1 をとり，他の整合パラメタ位置 $a_k(k\neq i)$ で関数値 0 をとるように選択する．すなわち，

$$\phi_i(a_k)=\delta_{i,k} \qquad (0\leqq i,\ k\leqq m) \qquad \text{(A 1.3)}$$

ここで，$\delta_{i,k}$ は Kronecker のデルタ $\delta_{i,k}=\begin{cases}1(i=k)\\0(i\neq k)\end{cases}$

とする．全く同様に，v 方向の補間関数系 $\{\Psi_j(v)\}_{0\leq j\leq n}$ を

$$\Psi_j(b_k)=\delta_{j,k} \qquad (0\leqq j,\ k\leqq n) \qquad \text{(A 1.4)}$$

を満たすように選択する．

このような補間関数の例としては，Lagrange 補間多項式がよく知られているが，(通過拘束線数―1) 次の多項式になるため，拘束線数が多くなると予期しない振動を発生する欠点がある（Farin[2]参照）．本稿では，通過拘束線数が 4 本以下のとき，Lagrange 補間多項式（中間ノットを持たないスプライン関数）を，通過拘束線数が 5 本以上のとき 3 次スプライン補間による補間関数を採用する．

u 方向補間関数系 $\{\phi_i(u)\}_{0\leq i\leq m}$ については以下のようになる．

まず，u 方向次数 $\hat{p}$ とノット・ベクトル $\hat{U}(\hat{p})=\{u_i\}$ を次のように設定する．

$m \leqq 3$（u 方向拘束線数≦4）のとき,

次数 $\hat{p} = m \leqq 3$,

ノット・ベクトル $\hat{U}(\hat{p}) = \{u_i\}_{0 \leq i \leq 2m+1}$

$$u_0 = \cdots = u_m = a_0 \qquad (m+1\ 重)$$

$$u_{m+1} = \cdots = u_{2m+1} = a_m \qquad (m+1\ 重) \qquad (A\ 1.5)$$

これで決まる m 次の B スプライン基底関数は，m 次の Lagrange 補間多項式と一致する．$m \geqq 4$（u 方向拘束線数≧5）のとき,

次数 $\hat{p} = 3$,

ノット・ベクトル $\hat{U}(\hat{p}) = \{u_i\}_{0 \leq i \leq m+4}$

$$u_0 = \cdots = u_3 = a_0 \qquad (4\ 重)$$

$$u_i = a_{i-2},\ 4 \leqq i \leqq m \qquad (1\ 重)$$

$$u_{m+1} = \cdots = u_{m+4} = a_m \qquad (4\ 重) \qquad (A\ 1.6)$$

このノットは de Boor[1]で「端点微分なし完全スプライン補間」として紹介されている．始終端の一つ内側の整合パラメタ a_1，a_{m-1} がノットに含まれないことに注意する．

これで定まる $\hat{p}$ 次の B スプライン基底関数 $\{N_{i,\hat{p}}^{\hat{U}(\hat{p})}(u)\}_{0 \leq i \leq m}$ により，補間関数系 $\{\phi_i(u)\}_{0 \leq i \leq m}$ を展開する．

v 方向補間関数系 $\{\Psi_j(v)\}_{0 \leq j \leq n}$ についても全く同様である．v 方向次数 $\hat{q}$ とノット・ベクトル $\hat{V}(\hat{q}) = \{v_j\}$ を次のように設定する．

$n \leqq 3$（v 方向拘束線数≦4）のとき,

次数 $\hat{q} = n \leqq 3$,

ノット・ベクトル $\hat{V}(\hat{q}) = \{v_j\}_{0 \leq j \leq 2n+1}$

$$v_0 = \cdots = v_n = b_0 \qquad (n+1\ 重)$$

$$v_{n+1} = \cdots = v_{2n+1} = b_n \qquad (n+1\ 重) \qquad (A\ 1.7)$$

これで決まる n 次の B スプライン基底関数は，n 次の Lagrange 補間多項式と一致する．$n \geqq 4$（v 方向拘束線数≧5）のとき,

次数 $\hat{q} = 3$,

ノット・ベクトル $\hat{V}(\hat{q}) = \{v_j\}_{0 \leq j \leq n+4}$

$$v_0 = \cdots = v_3 = b_0 \qquad (4\ 重)$$

$$v_j = b_{j-2},\ 4 \leqq j \leqq n \qquad (1\ 重)$$

$$v_{n+1} = \cdots = v_{n+4} = b_n \qquad (4\ 重) \qquad (A\ 1.8)$$

始終端の一つ内側の整合パラメタ b_1, b_{n-1} がノットに含まれないことに注意する．これで定まる $\hat{q}$ 次の B スプライン基底関数 $\{N_{j,\hat{q}}^{\hat{V}(\hat{q})}(v)\}_{0 \leq j \leq n}$ により，補間関数系 $\{\Psi_j(v)\}_{0 \leq j \leq n}$ を展開する．

これらの補間関数系を用いて v 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{V}_i(v)\}_{0 \leq i \leq m}$ の u 方向補間曲面を

$$\mathbf{S}_1(u,v) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k(u)\,\boldsymbol{V}_k(v) \qquad (A\ 1.9)$$

とおき，u 方向拘束線群 $\{\boldsymbol{U}_j(u)\}_{0 \leq j \leq n}$ の v 方向補間曲面を

$$\mathbf{S}_2(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \Psi_k(v)\,\boldsymbol{U}_k(u) \qquad (A\ 1.10)$$

とおく．さらに，交点群 $\{\boldsymbol{Q}_{i,j}\}$ の離散データを補間する第 3 の曲面を

$$\boldsymbol{S}_3(u,v)=[\phi_0(u)\cdots\ \phi_m(u)]\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{0,0} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{0,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{Q}_{m,0} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{m,n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Psi_0(v)\\ \vdots\\ \Psi_n(v)\end{bmatrix} \qquad \text{(A 1.11)}$$

とおくとき，CBD 拘束なしの Gordon 面は

$$\boldsymbol{S}_3(u,v)=\boldsymbol{S}_1(u,v)+\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v) \qquad \text{(A 1.12)}$$

として定義される．

付録 2　ツイスト整合

本文 3.5 節の補足を行う．付録 2 では，$u=a_0$，$v=b_0$ の隅点におけるツイスト不整合の解消を例として説明する．他の隅点についても同様である．

なお，付録 2 では u 方向の次数を $p(\geqq 3)$，v 方向の次数を $q(\geqq 3)$ で表す（今回の実装では $p=q=3$）．また，これに伴い，u 方向のノット・ベクトルを $U=\{u_i\}_{0\leq i\leq K+p+1}$，$v$ 方向のノット・ベクトルを $V=\{v_j\}_{0\leq j\leq L+q+1}$ とする．

この隅点では，$u=a_0$ 境界線を横断する CBD　$\boldsymbol{E}_0(v)$ を決めるスロープ制御曲線

$$\boldsymbol{D}\ \boldsymbol{V}_0(v)=\sum_{k=0}^{L}N_{k,p}^{V}(v)\,\boldsymbol{P}_{1,k}^{(v)} \qquad \text{(A 2.1)}$$

および $v=b_0$ 境界線を横断する CBD　$\boldsymbol{F}_0(u)$ を決めるスロープ制御曲線

$$\boldsymbol{D}\ \boldsymbol{U}_0(u)=\sum_{k=0}^{K}N_{k,q}^{U}(u)\,\boldsymbol{P}_{k,1}^{(u)} \qquad \text{(A 2.2)}$$

が合流し，本来は同一点であるべき制御点 $\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)}$ と $\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}$ が一般に一致しない現象が起きる．この制御点 $\boldsymbol{P}_{1,1}$ は隅でのツイスト・ベクトルを決める制御点（ツイスト制御点とよぶ）であり，この現象をツイスト不整合とよぶ．ツイスト制御点の食い違いを

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}-\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)} \qquad \text{(A 2.3)}$$

とおく．

このとき，$\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}$ と $\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)}$ を結ぶ線分のある内分点

$$(1-\gamma)\,\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}+\gamma\,\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)} \qquad \text{(A 2.4)}$$

をもってツイスト制御点を置き換えたいが，何の考慮もなく置換してしまうと，今度は CBD が変わって周辺面群と G^1 接続しなくなる危険がある．一方，隅点の近傍に u 方向，v 方向のノットを挿入すると，$\boldsymbol{P}_{1,1}^{(u)}$，$\boldsymbol{P}_{1,1}^{(v)}$ の食い違い（A 2.3）が小さくなり，ツイスト制御点の置換（A 2.4）を実行しても G^1 接続を崩さないようにできることは予想できるが，どのような位置にノットを挿入すればよいだろうか．この基準を与えるのが松木一木村理論[8]である．付録 2 の以下では，松木一木村理論のエッセンスと今回のケースへの適用法を述べる．

まず，これから張ろうとする面と G^1 接続させたい周辺面との接平面の許容接続折れ角度（CADCEUS での標準値は 1 度）に対して，

$$\tau=\sin\text{（許容接続折れ角度）} \qquad \text{(A 2.5)}$$

とする．また，面上線の接線ベクトルが面法線との直交からずれてもよい角度許容誤差は，許容接続折れ角度より厳しい値とし（CADCEUS での標準値は 0.015 度），$0<\kappa<1$ なる定数により

$\kappa\tau = \sin$（角度許容誤差） （A 2.6）

となっているとする（CADCEUS 標準値では，$\tau=0.017$，$\kappa=0.015$）．

周辺面と G^1 接続したい境界線の各点で，これから張ろうとする面の単位法線ベクトル $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ と周辺面の単位法線ベクトル $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ が

$$\|\vec{\boldsymbol{n}}_1\times\vec{\boldsymbol{n}}_2\|\leqq\tau \quad \text{(A 2.7)}$$

となっているのが G^1 接続条件である（‖ ‖はベクトルの長さ，×はベクトル外積）．

u 方向と v 方向の隅点近傍にノットを挿入して，ツイスト制御点の置換（A 2.4）を行っても（A 2.7）の精度で G^1 接続が成り立つようにしたい．ここで，ノット挿入位置をある定数 $0<\lambda<1$，$0<\mu<1$ に対して

$$u\text{ 方向ノット挿入位置}=(1-\lambda)u_p+\lambda u_{p+1}$$
$$v\text{ 方向ノット挿入位置}=(1-\mu)v_q+\mu v_{q+1} \quad \text{(A 2.8)}$$

とする．$u_p=a_0$ は u 方向始端ノット，u_{p+1} は始端の隣接ノット，$v_q=b_0$ は v 方向始端ノット，v_{q+1} は始端の隣接ノットである．挿入位置はこれらの中間位置である．

松木一木村論文[8]では，挿入するノットの多重度に関して言及がないが，本稿では，この位置に u，v それぞれ 2 重ノットを挿入する．その理由は，ツイスト制御点（各スロープ制御曲線の第 1 制御点）の置換変更に伴うスロープ制御曲線の形状変更の影響が，2 重ノットを挿入しておけば，始端から挿入ノット位置に局限されるからである．

ここで，ノット挿入により u 方向スロープ制御曲線と u 方向境界線との差は μ 倍に，v 方向スロープ制御曲線と v 方向境界線との差は λ 倍になり，各スロープ制御曲線は対応する境界線に近づくことに注意する．隅点近傍で

ω_u＝ノット挿入前の u 方向スロープ制御曲線と u 方向境界線との差の最小値

ω_v＝ノット挿入前の v 方向スロープ制御曲線と v 方向境界線との差の最小値 （A 2.9）

とおく．G^1 接続条件の不等式（A 2.7）から出発し，松木一木村[8]にならって，不等式の変形を行うことにより，最終的に以下の不等式を導くことができる．

$$\lambda\leqq\frac{\tau(1-\kappa)}{(1+\tau)\|\boldsymbol{D}\|}\cdot\frac{\omega_u}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\cdot\frac{1}{\gamma} \quad \text{(A 2.10)}$$

$$\mu\leqq\frac{\tau(1-\kappa)}{(1+\tau)\|\boldsymbol{D}\|}\cdot\frac{\omega_v}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1-\gamma)} \quad \text{(A 2.11)}$$

こうして，ノット挿入位置を決める比 λ，μ の上限を決める不等式が得られたが，上限値はもう一つ決めるべきパラメタ（内分比）γ を含んでいる．本稿では，$\lambda=\mu$ とすることとし，内分比 γ を

（A 2.10）の上限値＝（A 2.11）の上限値

を満たすように選ぶ．すなわち，

$$\frac{\omega_u}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p-1}}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{\omega_v}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1-\gamma)} \quad \text{(A 2.12)}$$

この解（ツイスト制御点の内分比）は

$$\gamma=\frac{\dfrac{\omega_u}{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{p-1}}}{\dfrac{\omega_u}{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{p-1}}+\dfrac{\omega_v}{\left(1-\dfrac{1}{q}\right)^{q-1}}}$$

で与えられる．こうして，ノット挿入上限位置の比として

$$\lambda=\mu\leqq\frac{\tau(1-\kappa)}{(1+\tau)\|\boldsymbol{D}\|}\cdot\frac{\omega_u}{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{p-1}}\cdot\frac{1}{\gamma} \qquad \text{(A 2.14)}$$

を得る．

（A 2.14）は理論式であり，実装に当たっては注意が必要である．ツイスト不整合を測る量 $\|\boldsymbol{D}\|$ が大きいと，比 $\lambda=\mu$ が非常に小さくなることがあるが，ここにノットを挿入してしまうと，隅点付近に微細なパッチ（ノットで挟まれる矩形領域）を発生させることになる．従って，パッチ幅の下限を別途定めておき，理論式が下限を下回る場合には，下限でカットする必要がある．この場合には，隅点付近で G^1 接続条件が満たされなくなるが，2 重ノットの挿入により隅点付近の 1 パッチに G^1 接続不成立領域が局限されるのでよしとしなければならない．もともと，$\|\boldsymbol{D}\|$ が大きい場合は，隅点付近で周辺面の単位法線ベクトルの変化が大きく，ツイスト整合が困難な場合である．

参考文献

［1］ de Boor, C.,“ A Practical Guide to Splines ”, Springer-Verlag, 1978.
［2］ Farin, G.,“ Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design ”, Academic Press, 1988.
［3］ Gordon, W. J.,“ Spline-blended surface interpolation through curve networks ”, J. Math. Mech., Vol. 18, No. 10, pp. 931-952, 1969.
［4］ Gordon, W. J.,“ Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation ”, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 8, No. 1, pp. 158-177, 1971.
［5］ Gordon, W. J.,“ Sculptured surface definition via blending function methods ”, in Piegl, L. Ed.,“ Fundamental Developments of Computer Aided Geometric Modeling ”, Academic Press, 1993.
［6］ Ishida, J.,“ The general B-spline interpolation method and its application to the modification of curves and surfaces ”, Computer-Aided Design, Vol. 29, No. 11, pp. 779-790, 1997.
［7］ Lin, F., and Hewitt, W. T.,“ Expressing Coons-Gordon surfaces as NURBS ”, Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 2, pp. 145-155, 1994.
［8］ 松木則夫，木村文彦，”曲面のツイスト不整合を許容誤差以内にする手法について”，精密工学会秋季大会学術講演論文集, 1990.
［9］ Piegl, L., and Tiller, W.,“ The NURBS Book ”, Springer-Verlag, 1995.

執筆者紹介　清　水　保　弘（Yasuhiro Shimizu）

昭和 29 年生．昭和 53 年東京大学理学部数学科卒業．55 年東京都立大学大学院理学研究科修士課程修了．59 年同博士課程満期退学．60 年日本ユニシス(株)入社．CAD/CAM システムの開発に従事．現在，ビジネスソリューション五部エンジニアリングシステム開発室に所属．日本数学会会員．情報処理学会会員．

関　戸　勝　己（Katsumi Sekido）

昭和 41 年生．平成元年東京大学工学部精密機械工学科卒業．平成 2 年日本ユニシス(株)入社．CAD/CAM システムの開発・保守に従事．現在，ビジネスソリューション五部エンジニアリングシステム開発室に所属．