

# アメリカン・オプションの理論価格の計算法

A Finite Difference Method for the Pricing of American Options

岡野 豊明

**要約** 現在我が国では「日本版ビッグバン」と呼ばれる金融大改革が進められており、その中の中心課題の一つにデリバティブ（金融派生商品）取引の拡大・展開がある。デリバティブの中で最も基本的なものに 1997 年 7 月にようやく我が国に導入された個別株オプションがあるが、この価格付け理論は金融の数値モデルの基礎となるものである。個別株オプションのうちのアメリカン・オプションの価格は理論価格を数式の形で求めることができず、数値解に頼らざるを得ないので、現在でもその数値解法の研究が盛んに行われている。

アメリカン・オプションの理論価格の数値計算法には、格子モデル、モンテカルロ・シミュレーションおよび偏微分方程式の差分法などがあるが、本稿では偏微分方程式の差分法をとりあげた。偏微分方程式の差分法を用いたアメリカン・オプションの価格付けには Brennan Schwartz アルゴリズムがよく用いられている。しかしながら、この方法はバニラ・オプションと呼ばれる単純なオプションの価格付けには有効であるが、近年盛んに考案されているエキゾチック・オプションという複雑なオプションの価格付けには不向きである。そこで、エキゾチック・オプションにも有効な汎用性のあるアメリカン・オプションの価格付け手法を提唱する。この手法は、流体力学分野における偏微分方程式の差分法を応用したもので、数値計算に現れる行列が正定値対称行列という性質のよい行列になるように差分化を行うことによって、計算の安定化と精度の向上を目指したものである。

**Abstract** A derivative is a financial instrument whose value depends on the values of more basic underlying assets. Derivatives such as options, futures and swaps have become increasingly important in the recent financial reform in Japan. An option gives its holder the right to buy or sell an underlying asset by a certain date for a certain price. A valuation of American style options is a rather difficult problem and no analytic solution can be available. Due to a lack of closed form solutions, many numerical schemes have been developed.

This paper presents a new finite difference method for the pricing of American stock options that can be formulated as a free boundary problem for the Black Scholes partial differential equation. The semi implicit finite difference scheme and the projected SOR method are applied to the free boundary problem. The new method is more accurate and more widely applicable to complex problems than the Brennan Schwartz method which uses the fully implicit finite difference scheme.

## 1. はじめに

現在わが国では「日本版ビッグバン」と呼ばれる金融大改革が推し進められている。その背景には 1970 年代以降の欧米における金融分野の技術革新の目覚ましい進展があり、わが国でも、このような革新技術を早急に導入しなければ世界に立ち後れてしまうからである。主として米国で発展した種々の革新的金融商品は、確率過程論、常微分・偏微分方程式、多変量解析、数理計画法といった数学理論および現代投資理論、

コンピュータ技術などを駆使して開発されている。このような金融商品の代表の一つにデリバティブがあり、デリバティブ取引の発展は、経済の自由化・グローバル化にともなう金融リスクの増大、多様化、複雑化に対して、異なるリスク選好を持つ経済主体間の取引を通じて社会全体として最適ナリスクシェアリングを実現すると期待されている<sup>[1]</sup>。

デリバティブの中で最も基本的なものに 1997 年ようやく我が国にも導入された個別株オプションがあるが、この価格付け理論は金融の数値モデルの中で確率過程論と最適化理論の最も美しい応用例の一つとみなされており、現在でもその数値解法について盛んな研究がなされている<sup>[4][6]</sup>。本稿では、個別株オプションのうちのアメリカン・オプションの価格付け問題に対し、流体力学分野における数値解析手法を応用した汎用性が高く精度のよい新しい手法を提唱する。

## 2. 個別株オプションとは

オプションとは、「特定の満期日（または満期日までの期間中）に特定の証券（原証券）をあらかじめ決められた価格（行使価格）で売買する権利」と定義できる。このうち、買う権利をコール・オプション（call option）、売る権利をプット・オプション（put option）と呼ぶ。なお、権利行使が満期日のみに限られているオプションを「ヨーロピアン・タイプ」、満期日までの期間中いつでも権利行使ができるオプションを「アメリカン・タイプ」と呼ぶ。以下においては、原証券が個別株式の場合を考える。

ある投資家がこの証券を一定期間  $[0, T]$  の間に価格  $E$  で購入する権利を与えるコール・オプションを入手したとすると、この投資家は原証券の価格が  $E$  よりも高くなれば権利を行使して利益を得ることができ、低くなれば権利を放棄して値下がりによる損失を免れることができる。

一方、原証券を価格  $E$  で売る権利のついたプット・オプションを入手したとすると、原証券の価格が  $E$  より低くなれば投資家は時価よりも高い価格で原証券を売却して利益を得ることができ、高くなれば権利を放棄することで損失を抑えることができる。

以上のことを整理すれば、オプションの満期日における価値（ペイオフ）を次式のように表すことができる。 $f$  を満期日  $T$  におけるオプションの価値、 $S_T$  を満期日  $T$  における原証券の価格、 $E$  を行使価格とすると、

$$f = \max[\theta(S_T - E), 0], \theta = 1: \text{Call}, \theta = -1: \text{Put} \quad (2.1)$$

オプションを入手した投資家は、オプションを行使する義務ではなく権利を得ることになるので、権利行使が有利ならば権利を行使するであろうし、不利であれば権利を放棄することができる。従ってオプションを入手する場合には権利の代価を支払うことになる。この代価はオプション価格あるいはオプション・プレミアムと呼ばれ、オプション契約の開始時に支払われる。

### 3. アメリカン・オプション

1973年 Black Scholes は、ヨーロッパ・タイプのオプション価格に関する以下のような偏微分方程式を導き、それを解いてオプション価格を求めた。

無リスク利子率が  $r$ 、株式のボラティリティーが  $\sigma$  の場合、時刻  $t < T$  で、株価が  $S$  のときのヨーロッパ・オプションの価格  $f(S, t)$  は以下の偏微分方程式を満足する<sup>[2]</sup>。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0 \quad (31)$$

この式は後ろ向きの放物型偏微分方程式であるので、満期における終端条件

$$f(S, T) = \max[\theta(S - E), 0], \theta = 1: \text{Call}, \theta = -1: \text{Put} \quad (32)$$

および  $S = 0$  と  $S = \infty$  における境界条件を与えると解が一意的に求められる。

ヨーロッパ・オプションの価格付け問題は、(31)、(32) のような偏微分方程式の初期値問題に帰着するが、満期日までの期間中にいつでも権利を行使できるというアメリカン・オプションの価格付け問題は、以下の(33) のような偏微分方程式の不等式問題（線形相補性問題）に帰着することが知られている。この不等式の導出には、確率過程の最適停止時理論という高度な数学理論が用いられているので、詳細については文献<sup>[8][9]</sup>を参照して頂きたい。なお、これからは議論の簡単化のためにアメリカン・プットの価格についてだけ述べる。

時刻  $t < T$  で、株価が  $S$  のときのアメリカン・プットの価格  $P(S, t)$  は次の不等式を満足する。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0, P \geq h \quad (33)$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \right) (h - P) = 0$$

ここで、 $h = \max(E - S, 0)$ （ペイオフ関数）である。このような不等式問題の解には自由境界  $S_f(t)$  が現れ、 $0 \leq S < S_f(t)$  においては早期行使が有利で

$$P = E - S, \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0$$

を満たし、 $S_f(t) < S$  においてはオプションを保持し続ける方が有利で

$$P > E - S, \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

を満足する（図1参照）。

このように、アメリカン・プットの価格を求める問題には、あらかじめわからない自由境界  $S_f(t)$  が現れ、自由境界値問題となる。この自由境界値問題の厳密解を解析的に求める方法はまだ見つかっておらず、近似解法や数値解法に頼らざるを得ない。

### 4. 数値解法

#### 4.1 偏微分方程式の変換

Black Scholes 偏微分方程式(31)の  $S$  に関する1階微分と2階微分項の係数は

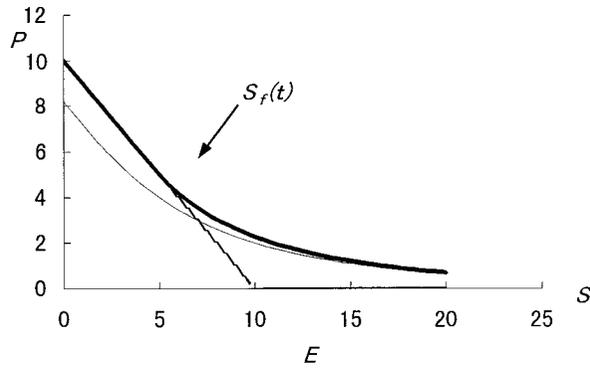


図 1 満期日前のアメリカン・プットとヨーロピアン・プットの価格  
(太線：アメリカン・プット，細線：ヨーロピアン・プット)

$S$  に依存しているので，この方程式をそのまま数値計算に用いるのは，数値解の収束性や安定性を保証する条件が煩雑になるという欠点がある<sup>[3]</sup>．また，(3 1) は後ろ向きの拡散方程式であるので，時間を逆向きにして前向き方程式に変換した方が直感的にわかりやすい．そこで， $S = Ee^x$ ， $t = T - \tau$ ， $f = Eu(x, \tau)$  とおいて， $u(x, \tau)$ ， $-\infty < x < \infty$ ， $0 \leq \tau \leq T$  に関する偏微分方程式に変換する．同様の変換を (3 3) に施して書き直すと以下ようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} + ru \geq 0, \quad u \geq g = \max(1 - e^{-x}, 0) \quad (4 1)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} - ru \right) (u - g) = 0$$

となる．ここで， $\beta = r - \frac{1}{2}\sigma^2$  である．この場合の初期条件と境界条件は以下のとおりである．

$$u(x, 0) = g(x) \quad (4 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, \tau) = g(x), \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

#### 4 2 Brennan Schwartz のアルゴリズム

Brennan Schwartz は，(4 1)，(4 2)の形のアメリカン・オプションの問題を fully implicit 差分法を用いて解いた<sup>[5]</sup>．そのアルゴリズムの有効性は，近年になってようやく数学的に証明されている<sup>[8]</sup>．本節では，偏微分方程式の有限差分法と Brennan Schwartz のアルゴリズムについて述べる．

##### 1) Fully implicit 差分法

偏微分方程式を差分法を用いて解く場合には， $x$  軸と  $\tau$  軸を微小な刻み幅  $\delta x$  と  $\delta \tau$  に分割し偏微分を差分商に置き換えて，メッシュ点上の  $u_j^n = u(j\delta x, n\delta \tau)$  を求める．ただし， $x$  は  $-\infty$  から  $+\infty$  まで動くので，十分大きな正の整数  $N^-$  と  $N^+$  を用いて  $x$  の範囲を  $-N^-\delta x \leq x \leq N^+\delta x$  で近似する．

Brennan Schwartz の fully implicit 差分法の場合には，偏微分を以下のような差分商に置き換える．

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta \tau}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\delta x)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\delta x}$$

前向き方程式の場合に、空間微分に対応する差分商の時間インデックスを  $n+1$  とするのが、fully implicit 差分法の特徴である。一方、この時間インデックスを  $n$  とするのが後で述べる explicit 差分法である。Fully implicit 差分法は explicit 差分法に比べて時間刻み幅を大きくとることができる。

上記の差分商を式(4.1)に代入して整理すると、以下のような三重対角行列  $B$  に関する線形相補性問題が得られる( $\tilde{a}$  と  $\tilde{b}$  がベクトルである場合、 $\tilde{a} \geq \tilde{b}$  は、 $a_i \geq b_i$  がすべての要素番号  $i$  について成り立つことを意味する)。

$$B\tilde{u}^{n+1} \geq \tilde{f}^n, \quad \tilde{u}^{n+1} \geq \tilde{g}, \quad (\tilde{u}^{n+1} - \tilde{g}) \cdot (B\tilde{u}^{n+1} - \tilde{f}^n) = 0 \tag{4.3}$$

ここで、

$$a = -\frac{\sigma^2 \delta \tau}{2(\delta x)^2} + \beta \frac{\delta \tau}{2\delta x}, \quad b = 1 + \frac{\sigma^2 \delta \tau}{(\delta x)^2} + r\delta \tau, \quad c = -\frac{\sigma^2 \delta \tau}{2(\delta x)^2} - \beta \frac{\delta \tau}{2\delta x}$$

$$B = \begin{pmatrix} bc & 0 & \dots & \dots & 0 \\ abc & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & abc & \\ 0 & \dots & \dots & ab & \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{-N+1}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} g_{-N+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}^n = \begin{pmatrix} u_{-N+1}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ag_{-N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cg_{N+1} \end{pmatrix}$$

式(4.3)の解  $\tilde{u}^n$  を  $n=0$  から始めて  $n=T/\delta\tau$  まで計算すると、満期日までの期間が  $T$  のアメリカン・オプションの価格が求められる。

2) Brennan Schwartz のアルゴリズム

1 タイムステップの線形相補性問題(4.3)を解くのに Brennan Schwartz が用いたアルゴリズムを一般の三重対角行列  $B$  の場合に記述する。まず、ベクトルの要素番号を付け替えて、(4.3)を以下の形に書き換える。

$$B = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 b_2 & c_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & a_N & b_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$B\tilde{u} \geq \tilde{f}, \quad \tilde{u} \geq \tilde{g}, \quad (\tilde{u} - \tilde{g}) \cdot (B\tilde{u} - \tilde{f}) = 0$$

Step 1: 連立一次方程式に  $B\tilde{u} = \tilde{f}$  対して、通常の高ス消去法とは逆向きに消去(後退消去)を行い、以下のような下三角行列を求める。

$$B' = \begin{pmatrix} b'_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 b'_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_N b'_N & \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f'_N \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} b'_N &= b_N, \quad f'_N = f_N \\ \text{For } i &= N-1 \text{ to } 1 \\ b'_i &= b_i - (c_i/b'_{i+1})a_{i+1} \\ f'_i &= f_i - (c_i/b'_{i+1})f'_{i+1} \end{aligned}$$

Step 2 : 前進代入で得られた  $u'_i$  とペイオフ  $g_i$  を比較して大きいものを解  $u_i$  とする .

$$\begin{aligned} u'_1 &= f'_1/b'_1, \quad u_1 = \max(u'_1, g_1) \\ \text{For } i &= 2 \text{ to } N \\ u'_i &= (f'_i - a_i u_{i-1})/b'_i \\ u_i &= \max(u'_i, g_i) \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 3) Brennan Schwartz アルゴリズムの短所

Brennan Schwartz のアルゴリズムは単純明快で高速な計算手法であるが、以下のような短所がある .

- ・式 (4.5), (4.6) はアメリカン・プットに対するアルゴリズムであるが、配当があるアメリカン・コールの場合には、メッシュ番号を降順に付け替える必要がある .
- ・ペイオフ  $\tilde{g}$  が単調 (増加あるいは減少) でない場合にはうまくいかない .
- ・自由境界が複数個ある場合にはうまくいかない . このような例として、5.1 節に形状が複雑な障害物問題の解析例を示した .
- ・マトリックス  $B$  が非対称であるため、数値解析でよく用いられる正定値対称行列の理論を適用することができず、新規の問題に対するアルゴリズムの有効性を事前に調べるのが難しい .

そこで、上記のような欠点を克服した、Brennan Schwartz のアルゴリズムに替わるオプション価格の新しい数値計算法を次節で提案する .

## 4.3 Semi implicit 差分法と Projected SOR 法

### 1) Semi implicit 差分法

Brennan Schwartz のアルゴリズムに現れるマトリックス  $B$  が非対称となるのは、式 (4.1) の 1 階微分項  $\partial u / \partial x$  (移流項) と 2 階微分項  $\partial^2 u / \partial x^2$  (拡散項) をともに implicit に離散化したためである . そこで拡散項のみを implicit に離散化し、移流項は explicit に離散化することにより、線形相補性問題 (4.3) に現れるマトリックス  $B$  を正定値対称行列とすることができる . このように implicit 差分と explicit 差分を組み合わせた差分法を semi implicit 差分法という .

移流項を explicit に離散化する場合、中心差分を用いると計算が不安定化することが知られているので、流体解析で用いられている以下のような一次風上差分法 (first order upwind difference) を用いる .

$$-\beta \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -\beta(u_j^n - u_{j-1}^n) / \delta x, & \text{for } \beta \leq 0 \\ -\beta(u_{j+1}^n - u_j^n) / \delta x, & \text{for } \beta > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

ここで、 $\beta$  は式 (4.1) に現れる係数である . 移流項に上のような一次風上差分法を用いた場合、タイムステップ幅  $\delta\tau$  はクーラン条件  $|\beta| \delta\tau / \delta x \leq 1$  という制約を受けるが、一般に  $|\beta|$  の値は小さいので、この制約は  $\delta\tau$  に対してそれほど大きな制約とはならない . 風上差分法は風上側の情報しか用いていないので、風下側の擾乱の影響を受けず、計算が安定化することが知られている .

### 2) Projected SOR (PSOR) 法

拡散項のみを implicit に扱い，移流項を (47) としたものを式 (43) に代入して整理すると，正定値対称行列  $B$  に関する線形相補性問題が得られる．

$$B\tilde{u}^{n+1} \geq \tilde{f}^n, \tilde{u}^{n+1} \geq \tilde{g}, (\tilde{u}^{n+1} - \tilde{g}) \cdot (B\tilde{u}^{n+1} - \tilde{f}^n) = 0 \quad (48)$$

ここで，

$$a = -\frac{\sigma^2 \delta \tau}{2(\delta x)^2}, \quad b = 1 + \frac{\sigma^2 \delta \tau}{(\delta x)^2} + r \delta \tau$$

$$B = \begin{pmatrix} ba & 0 & \dots & \dots & 0 \\ aba & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & aba & \\ 0 & \dots & \dots & ab & \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{-N+1}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} g_{-N+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{N+1} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\tilde{f}^n = \begin{pmatrix} u_{-N+1}^n \\ u_{-N+2}^n \\ \vdots \\ u_{N+2}^n \\ u_{N+1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(u_{-N+2}^n - u_{-N+1}^n) \\ \gamma(u_{-N+3}^n - u_{-N+2}^n) \\ \vdots \\ \gamma(u_{N+1}^n - u_{N+2}^n) \\ \gamma(u_{N+}^n - u_{N+1}^n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ag_{-N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ag_{N+} \end{pmatrix}, \quad \left( \gamma = \beta \frac{\delta \tau}{\delta x} > 0 \right)$$

(49) は  $\beta > 0$  の場合の式であるが， $\beta \leq 0$  の場合には  $\tilde{f}^n$  の第2項が後退差分に置き換わる．

偏微分方程式の離散化から得られる粗な正定値対称行列に関する線形相補性問題の数値解法に projected SOR 法 (以下，PSOR 法と略す) がある<sup>[7]</sup>．この方法は機械工学や浸透流などの流体力学の分野で古くから用いられてきた方法である．PSOR 法は，粗な連立一次方程式の反復解法である SOR 法に非常に簡単な修正を施したもので，式 (48)，(49) の場合にそのアルゴリズムを示すと以下のようなになる．なお，以下のアルゴリズムにおいて，ベクトル  $\tilde{u}^{n+1}$  の要素を  $u_j^{n+1} (j = 1, \dots, N)$  とする． $\tilde{g}$ ， $\tilde{f}^n$  についても同様である．また，反復回数  $k$  番目の解を  $\tilde{u}^{n+1,k}$  と表し，その要素を  $u_j^{n+1,k}$  とする．

- ① ベクトル  $\tilde{u}^{n+1}$  の初期推定値として， $u_j^{n+1,0} \geq g_j$  を満たす  $\tilde{u}^{n+1,0}$  を与える．
- ②  $j = 1, \dots, N$  に対して

$$y_j^{k+1} = [f_j^n - a(u_{j-1}^{n+1,k+1} + u_{j+1}^{n+1,k})] / b$$

$$u_j^{n+1,k+1} = \max(g_j, u_j^{n+1,k} + \omega(y_j^{k+1} - u_j^{n+1,k}))$$

ここで， $\omega$  は  $0 < \omega < 2$  を満たす反復の加速係数である．なお，通常の SOR 法は，最後の式において  $u_j^{n+1,k+1} = u_j^{n+1,k} + \omega(y_j^{k+1} - u_j^{n+1,k})$  としたものである．

- ③ 収束判定基準  $\varepsilon$  を十分小さくとり，ノルム  $\|\tilde{u}^{n+1,k+1} - \tilde{u}^{n+1,k}\| < \varepsilon$  となるまで，上記②の反復を繰り返す．

この PSOR 法のアルゴリズムは反復解法であるため，Brennan Schwartz 法の

ような直接的な解法に比べて計算時間がかかるが， $B$  が正定値対称行列の場合には，任意の  $\bar{g}$  に対して収束が保証される．

## 5. 解析結果の比較

### 5.1 障害物問題

本節の問題はアメリカン・オプションとは無関係であるが，数値計算法の性能を直感的にわかりやすく比較する目的でとりあげたものである．図 2 に示したような  $x$  軸の  $[-1, 1]$  区間における 2 コブ形の障害物の上を，座標  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  を結んで輪ゴムをピンと張る問題を考える．障害物の  $x$  軸からの高さを， $g(x)$ ，輪ゴムの変位を  $u(x)$  とすると， $u(x)$  は以下のような常微分方程式の線形相補性問題の解となることが知られている．

$$\begin{aligned} u''(u-g) &= 0, \quad -u'' \geq 0, \quad u-g \geq 0 \\ u(-1) &= u(1) = 0, \quad u, u': \text{continuous} \end{aligned}$$

この問題を PSOR 法と Brennan Schwartz 法で解いた結果を図 2 と図 3 に示した．明らかに PSOR 法は正解を与えているが，Brennan Schwartz 法の結果は間違っている．この計算例から，Brennan Schwartz アルゴリズムは自由境界が二つ以上ある場合には適用できないことがわかる．

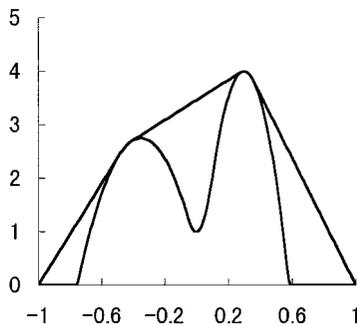


図 2 PSOR 法の結果

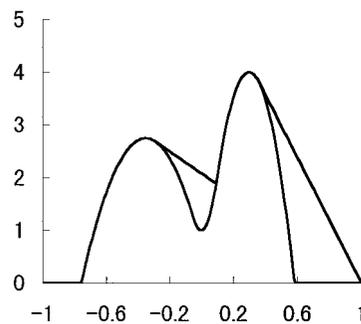


図 3 Brennan Schwartz 法の結果

### 5.2 オプション価格の比較

本節ではアメリカン・プットのオプション価格について，Semi implicit/PSOR 法と Brennan Schwartz 法の結果を比較する．アメリカン・オプションの価格の厳密解はないので，厳密解にかわるものとして文献<sup>4)</sup>に記載されている 5000 ステップの BBS (Binomial with a Black Scholes modification) 法の結果を用いた．BBS 法は基本的には二項 (Binomial) モデルであるが，最終の一つ前のステップにおいて Black Scholes の公式を用いるという修正を施した手法である．

Semi implicit/PSOR 法と Brennan Schwartz 法との計算条件は共通にし， $\delta x = 0.01$ ， $N^- = 100$ ， $N^+ = 100$ ， $\delta\tau = 2.5 \times 10^{-3}$  year とした．この場合，以下に示した計算結果における標準的な満期  $T = 0.5$  year の計算は 200 ステップで済み，BBS 法の 5000

表 1 計算結果の比較

S (\$)	T (year)	$\sigma$ (%)	$r$ (%)	Binom ①	PSOR ②	B-S ③	Error ①-②	Error ①-③
80	0.500	40	6	21.6057	21.6036	21.6006	0.0021	0.0051
85	0.500	40	6	18.0370	18.0330	18.0290	0.0040	0.0080
90	0.500	40	6	14.9178	14.9132	14.9086	0.0046	0.0092
95	0.500	40	6	12.2306	12.2240	12.2189	0.0066	0.0117
100	0.500	40	6	9.9448	9.9381	9.9328	0.0067	0.0120
105	0.500	40	6	8.0265	8.0206	8.0154	0.0059	0.0111
110	0.500	40	6	6.4337	6.4297	6.4246	0.0040	0.0091
115	0.500	40	6	5.1257	5.1208	5.1160	0.0049	0.0097
120	0.500	40	6	4.0602	4.0579	4.0536	0.0023	0.0066
100	0.500	40	2	10.7734	10.7783	10.7626	-0.0049	0.0108
100	0.500	40	4	10.3441	10.3429	10.3324	0.0012	0.0117
100	0.500	40	6	9.9448	9.9381	9.9328	0.0067	0.0120
100	0.500	40	8	9.5707	9.5586	9.5586	0.0121	0.0121
100	0.500	40	10	9.2186	9.2120	9.2067	0.0066	0.0119
100	0.500	30	6	7.2110	7.2065	7.2008	0.0045	0.0102
100	0.500	35	6	8.5774	8.5667	8.5663	0.0107	0.0111
100	0.500	40	6	9.9448	9.9381	9.9328	0.0067	0.0120
100	0.500	45	6	11.3116	11.3079	11.2986	0.0037	0.0130
100	0.500	50	6	12.6767	12.6754	12.6626	0.0013	0.0141
100	0.083	40	6	4.3732	4.3616	4.3590	0.0116	0.0142
100	0.167	40	6	6.0716	6.0526	6.0491	0.0190	0.0225
100	0.250	40	6	7.3070	7.2969	7.2928	0.0101	0.0142
100	0.333	40	6	8.3149	8.3106	8.3061	0.0043	0.0088
100	0.417	40	6	9.1869	9.1773	9.1724	0.0096	0.0145
100	0.500	40	6	9.9448	9.9397	9.9345	0.0051	0.0103
100	0.583	40	6	10.6247	10.6233	10.6177	0.0014	0.0070
100	0.667	40	6	11.2500	11.2444	11.2386	0.0056	0.0114
100	0.750	40	6	11.8172	11.8148	11.8087	0.0024	0.0085
100	0.833	40	6	12.3424	12.3426	12.3364	-0.0002	0.0060
100	0.917	40	6	12.8374	12.8343	12.8278	0.0031	0.0096

Binom : BBS 法、 PSOR : Semi-implicit/PSOR 法、

B-S : Brennan-Schwartz 法

ステップに比べて大幅に小さいことがわかる。

表 1 に、BBS 法、Semi implicit/PSOR 法および Brennan Schwartz 法について、株価  $S$ 、無リスク利子率  $r$ 、ボラティリティー  $\sigma$  および満期  $T$  を変化させた計算ケースの結果を比較した。満期  $T$  を変化させたケースについては、 $\delta\tau$  として  $1/480 = 2.083 \times 10^{-3}$  year を用いた。表 1 からわかるように、すべてのケースについて Semi implicit/PSOR 法の結果は Brennan Schwartz 法の結果より精度がよく、誤差が半分に減少しているケースが多い。

PSOR 法の反復回数は、収束判定基準  $\varepsilon$  を  $10^{-6}$  とした場合約 5 回であるので、Brennan Schwartz 法に比べて約 5 倍の計算時間がかかるが、これは汎用性を重視した代

償である。ただし、この場合でも、拡散項・移流項とともに explicit に離散化した最も単純な fully explicit 差分法を用いて計算を行った場合に比べると約 2 倍の計算速度がある。

## 6. 結 び

Semi implicit 差分法と Projected SOR 法を用いたアメリカン・オプションの新しい価格計算法を考案した。この方法は

- ・数値計算に現れる行列が性質のよい正定値対称行列となり、計算の安定化を図ることができる。また、解の収束性や計算の安定性に関して厳密な数学理論が適用できる。
- ・オプションのペイオフ関数がどんな形状であっても、収束性が理論的に保証されている。

という長所を持っている。本手法による計算結果と従来からの Brennan Schwartz アルゴリズムによる計算結果を比較し、精度が向上していることを確かめた。なお、本稿では定数係数のアメリカン・プットについてだけしか述べなかったが、今後はエキゾチック・オプションのようなより複雑なペイオフ関数を持つ問題に対して本手法を適用していく予定である。

- 
- 参考文献**
- [ 1 ] ロバート・C. マートン, 大野克人 (1996) 金融技術革命, 東洋経済新報社.
  - [ 2 ] 木島正明 (1994) ファイナンス工学入門, 第 II 部: 派生証券の価格付け理論, 日科技連.
  - [ 3 ] 木島正明 (1996) ファイナンス工学入門, 第 III 部: 数値計算法, 日科技連.
  - [ 4 ] AitSahlia, F. and Carr, P(1997) " American Options: A Comparison of Numerical Methods," in Numerical Methods in Finance, Rogers, L.C.G. and Talay, D. ed., Cambridge University Press.
  - [ 5 ] Brennan, M. and Schwartz, E(1977) " The Valuation of American Put Options," J. of Finance, 32, pp. 449-62.
  - [ 6 ] Broadie, M. and Detemple, J(1997) " Recent Advances in Numerical Methods for Pricing Derivative Securities," in Numerical Methods in Finance, Rogers, L.C.G. and Talay, D. ed., Cambridge University Press.
  - [ 7 ] Cryer, C.W(1971) " The Solution of a Quadratic Programming Problem using Systematic Overrelaxation," SIAM J. Control, 9, pp. 385-92.
  - [ 8 ] Lamberton, D. and Lapeyre, B(1996) Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall.
  - [ 9 ] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J(1995) The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press.

**執筆者紹介** 岡野豊明 (Takaaki Okano)

1969年東京大学大学院数学科修士課程修了。1971年日本ユニバック総合研究所に入社。主として原子力安全解析分野における熱流動解析業務を担当。現在、日本ユニシス(株)ソリューションシステム部ソリューション技術室に所属し、各種数値解析・統計解析業務を担当。