Hull & White モデルによる債券オプションのプライシング

Bond Option Pricing Based-on Hull & White Model

小 川 正 夫

要 約 Hull & White モデルによる債券アメリカンオプションの理論価格を算出するプログラムを開発し理論価格の妥当性を検証した．単純なアルゴリズムだけでは計算時間，計算精度共に不十分で次のような実務上の問題点が発生した．

1）「短期金利が正規分布に従う」という条件では，金利の低い部分で負になってしまう．

2） 債券の残存期間が 7 年〜10 年であるのに対し，オプション期間が数日〜数か月なので 1 種類の時間刻み幅で離散化するには無理がある．刻み幅を小さくすると計算時間が飛躍的に増加し，刻み幅を大きくすると債券アメリカンオプションのプレミアムの推定精度が悪くなる．

3） オプションのキャッシュフローがモデルの格子点に乗らないことが多い．不適切な処理では計算精度が悪くなる．

4） Hull & White モデルのモデルパラメータ a，σ の最適化をどうするか？

これらの問題点に関して有効な対策を施すことによって，実務に耐えうる計算モデルが得られた．

Abstract We developed programs for American-style bond option based on the Hull & White 's trinomial model, and examined the accuracy of the option premium which calculated by the programs. A plain algorithm was not enough with the respect of computing time and accuracy, and caused following issues at the practical point of view :

1） Short rates take negative values at the lower part of the lattice with the condition of " short rates follow normal distribution ".

2） Comparing with the available period of bonds which is seven to ten years as usual, the option period usually takes several days to months. Therefore, it is difficult to be restricted to discrete time model with a single time interval. The calculation time increases drastically as reducing the time interval, and the precision of estimate of American bond option becomes worse as increasing the interval.

3） Cash flows of option may not fit node points of model some time. An inappropriate operation leads to inaccuracy of computation.

4） How to optimize Hull & White's model parameter, " a " and " σ " ?

The computation model that can full fill requirements of practical business was figured out as finding useful solutions for these issues.

1. は じ め に

金融派生商品（デリバティブ）は原資産と呼ばれる金融商品の将来価格に応じて価格が決まる派生商品の総称であり，代表的な金融派生商品の種類を表 1 に示す．

表 1　代表的な金融派生商品

金融派生商品の種類	原資産	特徴
個別株オプション	個別株	個別株の売買権利を売買いする
金利スワップ	資金取引	同一通貨での固定金利と変動金利を交換する
金利スワップション	金利スワップ	金利スワップを実行する権利を売買する
通貨スワップ	２通貨資金取引	自国通貨資金取引と他国通貨資金取引を交換する
通貨オプション	２通貨	円でドルを買う権利を売買する、あるいはドルで円を買う権利を売買する等
金利先物	市場金利	金利先物を売買する
金利先物オプション	金利先物	金利先物の売買権利を売買する
債券先物	国債	債券先物を売買する
債券オプション	個別債券	個別債券の売買権利を売買する
債券先物オプション	債券先物	債券先物の売買権利を売買する

表 1 の金融派生商品は最も基本的なものであり，実務上は顧客の要望に合わせてこれらを複雑に組み合わせた複合派生商品が取り引きされることも多い．

金融派生商品の取引は，現物の金融商品取引に比較して少ない資金で大きな取引ができることが特徴である．金融派生商品取引の失敗により多大な損失を被った事例が多数報告されているように，金融派生商品取引には大きなリスクが伴うのでその適正な価格評価は非常に重要である．

金融派生商品の価格評価モデルに関する論文は既に数多く発表されており，現在も同様である．

価格評価モデルは下記のごとくに分類される．

- 解析解モデル：公式により理論価格を直接求める．
- 有限差分法モデル：適切な境界条件を設定しモデルを差分方程式で近似して理論価格を求める．
- 格子モデル：価格あるいは金利の変動を格子ツリーに展開し，理論価格を求める．
- モンテカルロ・モデル：乱数を使って理論価格を多数計算し，平均を計算することにより理論価格を求める．

解析解モデルの代表例として Black & Scholes モデルがあり，このモデルは現在でもオプションの理論価格公式として幅広く適用されている．モンテカルロ・モデルは確率変動する項を含んだ式に乱数を代入して理論価格を求める操作を多数回繰り返し，理論価格の平均値を求める方法であり，解析的に解く必要がないのでほとんどの金融派生商品に適用可能であるが，計算時間がかかることが欠点であった．しかし，「準乱数」と呼ばれる乱数の有効性が立証されコンピュータの処理能力の向上により現在では金融派生商品の理論価格推定の有力な方法になりつつある．有限差分法はアルゴリズムが難解で適用事例は少ない．本稿で述べる Hull & White[*1] モデルは格子モデルに属する．格子モデルに属する他のモデルとしては，2 項モデル，HJM[*2] モデ

ル，CIR モデル等が有名である．格子モデルでは，金利の変動を格子ツリーで表現することが可能であり，キャッシュフローに変換できる金融商品及び金融派生商品全てに適用できるので応用範囲が広い．

Hull & White モデルの特徴は下記の通りである．

・計算アルゴリズムが容易．
・アメリカンオプションの理論価格計算が可能である．
・金利の平均回帰性[*3]を取り込んでいる．
・格子点の再結合性を仮定するので格子点数が少なくなり，実用的である．
・金利の変動を正規分布で表現する．

欠点としては，

・格子点の個数は時間の刻み幅に依存しているので，刻み幅を小さくすると格子点数が増大し計算時間がかかる．
・金利の変動を正規分布で表現するため，金利が負になることを排除できない．

がある．本稿では，

・時間の刻み幅を 2 種類採用することで計算精度を維持しながら格子点数を大幅に減少させて計算時間を短縮化した．
・金利の変動を対数正規分布で表現することにより，金利が負にならないようにした．
・格子点に乗らないキャッシュフローをバケッティング技術[*4]を用いて分解し計算精度を高めた．

等の改善をすることで Hull & White モデルの実用性を高めた．Hull & White モデルに代表される格子モデルは，単に金融派生商品の評価に有効であるだけでなく金利で説明される金融商品全般の評価にも応用できる重要なモデルである．本稿では，アメリカンスタイルの債券オプションに適用して上記改善点の有効性を確認した．

2. オプションとは

オプションは金融派生商品の一種であり，オプションの買い手と売り手で原資産と呼ばれる金融商品の売買権利を売買する取引であり契約時点で次のような取り決めをする．

・対象原資産：オプションの価格を決める金融商品であり，債券オプションの場合は個別債券を任意に選ぶ．本稿の検証では対象原資産として第 182 回債とその実価格変動履歴を選択した．
・オプション満期日：取引を決済する最終期日. 当事者同志で自由に設定できる．
・想定元本：オプション取引の規模を示す．債券アメリカンオプションの原資産は債券なのでオプションの取引規模を債券額面金額で表す．オプション取引の契約時点で原資産が実際に売り買いされる訳ではなく，オプションの決済額を計算するために使われるので想定元本と呼ばれる．
・行使価格：オプション決済時点で適用される原資産の価格．
・オプションスタイル：オプションの権利行使日がオプション満期日に限定される場合をヨーロピアンオプション，オプションの権利行使日が契約日からオプ

ション満期日のいつでも良い場合がアメリカンオプションである．

・オプションタイプ：オプション権利の内容によりコールとプットに分かれる．

コール：オプションの買い手がオプションの売り手から原資産を行使価格で購入する権利を持つ．オプションの買い手は自分が有利な場合に権利を行使することができる．

プット：オプションの買い手がオプション売り手に原資産を行使価格で売却する権利を持つ．コールと同様に，オプションの買い手は自分が有利な場合だけ権利を行使することができる．

・プレミアム：上記の契約はオプションの買い手に一方的に有利なので，権利を購入する対価として契約時点である金額をオプションの売り手に支払う．この対価をプレミアムと呼ぶ．プレミアムがオプション価格である．

債券アメリカンオプションの取引具体例を表 2 に示す．

表 2　債券オプション例（アメリカン，ATM）　　（日経金融新聞より）

オプションタイプ別プレミアム	オプション満期日：2 W	オプション満期日：1 M
コール・プレミアム（額面 100 円当たり）	0.31〜0.39 円	0.45〜0.55 円
プット・プレミアム（額面 100 円当たり）	0.40〜0.48 円	0.65〜0.75 円

原資産：182 回債．時価：104.51 円

表 2 は日経金融新聞に毎日表示されている．表中の数字が債券額面 100 円当たりのプレミアムであり，オプション取引の条件により変動する．原資産は第 182 回債である．時価 104.51 円は観測日における第 182 回債の額面 100 円に対する価格である．想定元本は額面 100 円を基本として決める．想定元本を 1 億円に設定すると，1 億円/100 円の比率によりプレミアムは百万倍となる．オプション満期日の 2 W は契約日（観測日）の 2 週間応答日がオプション満期日であることを意味する．同様に 1 M はオプション満期日が契約日の 1 か月応答日であることを意味する．オプションスタイルはアメリカンなのでオプション権利所有者は契約日からオプション満期日までのいつでも権利を行使できる．ATM は At　The　Monney の略で行使価格を契約日の時価 104.51 円に設定することを意味する．プレミアムがある範囲で示されているのは参考値のためである．オプションの買い手は安いプレミアムで権利を購入しようとし，売り手は高いプレミアムで権利を売ろうとする．

コールオプションの買い手は，オプション期間内のある日の時価が行使価格 104.51 円よりも高くなっていれば，オプション売り手から 182 回債を 104.51 円で購入し，国債市場で時価で売却することにより利益が得られる．オプション買い手に有利な局面がなければオプション買い手はオプション権利を放棄する．この場合オプション買い手の損失は 0 である．

プットオプション買い手は，オプション期間内のある日の時価が行使価格 104.51 円よりも安くなっていれば，182 回債を国債市場で時価で購入しオプション売り手に

104.51円で売却することにより利益が得られる．オプション買い手に有利な局面がなければオプション買い手はオプション権利を放棄する．この場合オプション買い手の損失は0である．

オプション買い手の損益を図示すると図1のようになる．

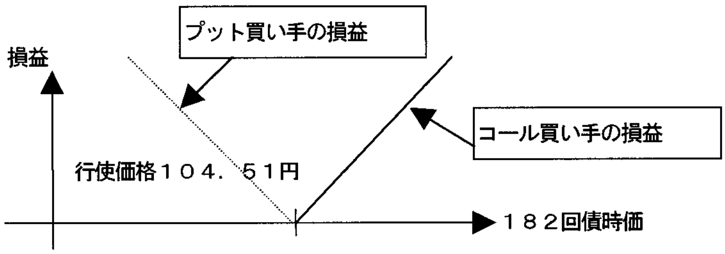


図 1　オプション買い手の損益

図1は権利行使あるいは権利放棄時点での損益を示したもので，この損益をペイオフと呼ぶ．オプション買い手の最終損益は「ペイオフ－プレミアム」となる．

オプション取引の表面上の手続きは簡単であるが，原資産の将来時価変動が不確実であるためプレミアムの計算は簡単ではない．

ヨーロピアンオプションのプレミアム計算公式（解析解）は Black & Scholes モデルが発表されてから以降多数の計算公式が発表されているが，アメリカンオプションのプレミアム計算公式はまだ確立されていない．現時点では，近似公式，有限差分法モデル，格子モデル，モンテカルロ・モデル等によるアプローチが盛んに研究されている．

3.　Hull & White モデルの概要

3.1　金利の確率的表現

Hull & White モデルによる債券オプションでは，国債の時価を直接の分析対象にしないで国債の時価を導く金利の将来変動に注目する．この金利は短期金利あるいはスポットレートと呼ばれる種類の金利である．Hull & White モデルは短期金利が式（3-1）に従うと仮定する．

$$dr(t)=(\phi(t)-a(t)r(t))dt+\sigma(t)dB(t) \tag{3-1}$$

式（3-1）は確率微分方程式と呼ばれるもので時間や金利の変化が連続的に表現されいる．$r(t)$ は短期金利と呼ばれ，微少期間の金利を表す．$\phi(t)$ は時間の関数である．式（3-1）の右辺の第1項を変形すると $a(t)[\phi(t)/a(t)-r(t)]dt$ と書ける．この式から，$r(t)$が大きくなると $\phi(t)/a(t)-r(t)$ が負になり短期金利が下降する．逆に，$r(t)$ が小さくなると $\phi(t)/a(t)-r(t)$ が正になり短期金利は上昇する．つまり，短期金利に対して常に $\phi(t)/a(t)$ に近づくような力が働くので，この性質を短期金利の平均回帰性とよぶ．$\phi(t)/a(t)$ は短期金利 $r(t)$ の平均レベルを表す．時間の関数 $\phi(t)$ はイールドカーブ[*5]と整合性を持つように決定される．$a(t)$ は平均回帰性を調整するパラメータで平均回帰速度パラメータと呼ばれる．$a(t)$ が大きくなるに

従って短期金利 r(t) が平均回帰レベル $\phi(t)/a(t)$ に収束する速度が大きくなる．B(t) は将来の短期金利の不確実性を確率的に表現する項でブラウン運動を表す．ここでは dB(t) が平均 0 分散 dt の正規分布に従う確率変数であると理解すれば十分である．σ は短期金利のボラティリティ[*6]と呼ばれ短期金利の変動の大きさを表す．式（3-1）ではパラメータ a，σ が時間の関数になっているが本稿では a，σ を定数として扱うことにする．

$$dr(t)=(\phi(t)-ar(t))dt+\sigma dB(t) \tag{3-2}$$

3.2　格子モデル

式（3-2）を直接的に解くことは可能である．式（3-2）による債券ヨーロピアンオプションの解析解も発表されている．しかし，解析的方法を理解するためには確率過程・微積分等に関して高度な知識が必要である．アメリカンオプションはオプション満期までいつでも権利行使可能なので最適権利行使時点およびプレミアムを解析的な公式で求めることは困難である．そこで Hull & White は式（3-2）を格子モデルを使って離散近似する方法を提案した．この方法は格子点（ノード）と呼ばれる離散点に金利と推移確率を割り当てるので，金融商品や金融派生商品の格子点における将来価格を求めることができる．格子モデルはアメリカンオプション評価の有力なツールである．この節では Hull & White の格子モデル（以降では単に HW モデルと略記する）の構造を簡単に説明し，次節以降で HW モデルの構築法及び利用法を説明する．HW モデルを図示すると図 2 のようになる．

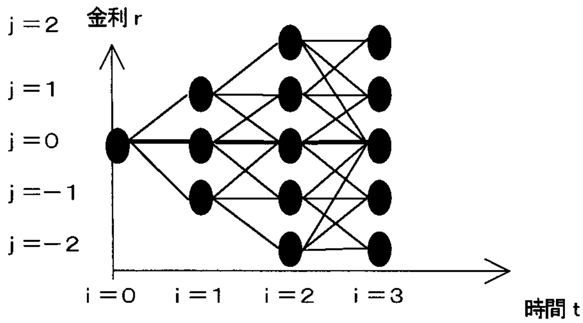


図 2　HW モデルの構造

図 2 の黒丸が格子点である．時間軸の刻みを Δt，金利軸の刻みを Δr，i を 0 以上の整数，j を整数として座標（$(i\Delta t$，$j\Delta r)$ 上に格子点を配置する．この i，j を使って格子点を（i，j）と表す．格子点と格子点を結ぶ線は格子点の推移関係を示す．図 2 は木構造をしているのでツリーと呼ばれる．以降において，木構造に注目している場合には HW ツリー，計算方法も含めたモデル全体に注目している場合には HW モデルと表現する．HW ツリーは図 3 の様な基本 3 パターンの組み合わせで構成されている．

各パターンの左側の格子点を（i，j）とする．A パターンの場合，右側の格子点は上から順に（i+1，j+1），（i+1，j），（i+1，j−1）となる．これは時間が Δt だけ経過する間に金利が次の三つのいずれかに変化することを表す．

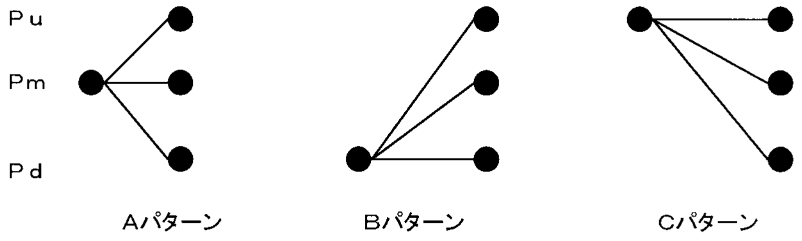


図 3　基本 3 パターン

$j\Delta r \to (j+1)\Delta r$：金利が Δr だけ上昇
$j\Delta r \to j\Delta r$：金利が横這い
$j\Delta r \to (j-1)\Delta r$：金利が Δr だけ下降

HW ツリーはどの格子点からも常に三つの状態に分岐することから 3 項格子モデルの一種である．三つの状態のどれに移るかは確率的であるとし，上から順に確率 Pu, Pm, Pd を割り当てる．これを推移確率と呼ぶ．確率の性質から，$Pu+Pm+Pd=1$ で各確率は非負である．B，C パターンにも推移確率を割り当てる．A パターンは金利が上下に広がる場合，B パターンは金利がこれ以上下降しない場合，C パターンは金利がこれ以上上昇しない場合に対応する．B，C パターンを導入することにより，金利の平均回帰性が実現される．推移確率は常に左側の格子点（i，j）に割り当てられることに注意する．

図 2 の Δt を用いて，式（3–2）を離散近似しておく．

$$r(i+1)-r(i)=(\phi(i)-ar(i))\Delta t+\sigma x(i) \tag{3-3}$$

r(i)：時点 i での短期金利 x(i)：平均 0, 分散 Δt の正規分布に従う確率変数

式（3–3）は時間変化量 Δt と金利変化量（$r(i+1)-r(i)$）との関係を示している．Hull & White は問題を簡単にするために $\phi(i)=0$ for all $i \geqq 0$，金利 r の初期値 $r(0)=0$ とした式（3–4）を近似することを考えた．

$$r(i+1)-r(i)=-ar(i)\Delta t+\sigma x(i) \quad r(0)=0 \tag{3-4}$$

式（3–4）を図 2 の HW ツリーで近似するために，時間刻み Δt を目的に応じて任意に決めて，金利の刻み幅を

$$\Delta r=\sigma\sqrt{3\Delta t} \tag{3-5}$$

とした．式（3–5）は，非負の推移確率が存在することを保証し，かつ時間刻み $\Delta t \to 0$ としたとき，離散モデルが連続モデルに収束することを保証している．

3.3　推移確率の推定

HW モデル構築の第一ステップは，式（3–4）を近似する HW ツリーの各格子点に割り当てる推移確率を求めることである．式（3–4）において，x(i) が平均 0，分散 Δt の正規分布に従うことから，$r(i+1)-r(i)$ の平均と分散は式（3–4）から直接求められる．

$$E[r(i+1)-r(i)]=(-a\Delta t)r(i)=Mr(i)$$
$$Var[r(i+1)-r(i)]=\sigma^2\Delta t \tag{3-6}$$

ただし，$M=-a\Delta t$

一方，図 3 の A パターンにおいて左側の格子点（i, j）の金利を $r=j\Delta r$ とする．格子点（i, j）での金利変化を Δy で表すと Δy は Δr, 0, $-\Delta r$ のいずれかであり，生起確率がそれぞれ Pu, Pm, Pd であるから，Δy の期待値と分散は,

$$\begin{aligned} E[\Delta y] &= Pu\cdot\Delta r+Pm\cdot 0+Pd\cdot(-\Delta r) \\ Var[\Delta y] &= E[\Delta y^2]-E[\Delta y]^2 \\ &= Pu(\Delta r)^2+Pd(\Delta r)^2-(Pu\cdot\Delta r-Pd\cdot\Delta r)^2 \end{aligned} \tag{3-7}$$

となる．式（3-6）と式（3-7）が一致するように推移確率を求める．結果を整理すると，

・A パターンでの推移確率

$$Pu=\frac{1}{6}+\frac{j^2M^2+jM}{2}$$

$$Pm=\frac{2}{3}-j^2M^2 \qquad \text{確率が負にならない j の範囲} \tag{3-8}$$

$$Pd=\frac{1}{6}+\frac{j^2M^2-jM}{2} \qquad \frac{\sqrt{6}}{3M}<j<-\frac{\sqrt{6}}{3M}$$

が得られる．B パターン，C パターンの場合も同様に考える．

・B パターンの場合

$$Pu=\frac{1}{6}+\frac{j^2M^2-jM}{2}$$

$$Pm=-\frac{1}{3}-j^2M^2+2jM \qquad \text{確率が負にならない j の範囲} \tag{3-9}$$

$$Pd=\frac{7}{6}+\frac{j^2M^2-3jM}{2} \qquad \frac{3+\sqrt{6}}{3M}<j<\frac{3-\sqrt{6}}{3M}$$

・C パターンの場合

$$Pu=\frac{7}{6}+\frac{j^2M^2+3jM}{2}$$

$$Pm=-\frac{1}{3}-j^2M^2-2jM \qquad \text{確率が負にならない j の範囲} \tag{3-10}$$

$$Pd=\frac{7}{6}+\frac{j^2M^2+jM}{2} \qquad -\frac{3-\sqrt{6}}{3M}<j<-\frac{3+\sqrt{6}}{3M}$$

HW モデルでは，格子点の推移確率は時間軸の位置 i には関係せず，金利軸の位置 j と推移パターンだけで決まる．A パターンだけでは HW ツリーを構成できず，j の絶対値が一定以上になったとき B 及び C パターンに切り替えることが必要である．また，図 2 の格子点の配置，推移確率共に j に関して上下対称となることがわかる．

式（3-8），式（3-10）から A パターンと C パターンで共通な j の範囲は

$$-\frac{3-\sqrt{6}}{3M}<j<-\frac{\sqrt{6}}{3M} \tag{3-11}$$

である．A パターンから C パターンへ切り替える j は，式（3-11）を満たす整数の中から任意に選択すればよい．この j を Jmax で表す．図 2 において $i=0$, $j=0$ の格子点から出発し，A パターンにより格子点を上下に広げ，$j=$Jmax となった時点で

A パターンから，C パターンに切り替える．A パターンから B パターンへ切り替える j の値を Jmin とすると，HW ツリーが j に関して上下対称であることから，Jmin ＝－Jmax とする．

3.4　HW ツリーのイールドカーブフィッティング

図 2 の HW ツリーは，この段階では式（3-4）に対応している．式（3-4）では金利の平均レベル ϕ(i)/a は 0 となっていて，金利の初期値 r(0)＝0 となっている．次のステップは，図 2 の HW ツリーを式(3-3)に対応するように変更することである．図 2 の太線上の格子点（中央格子点）で考えると中央格子点（i, 0）の金利は j＝0 であるから jΔr＝0 となっている．この中央格子点（i, 0）に 0 でない金利 α_i を割り当てることにする．上下に隣り合う格子点間の金利差は常に Δr であるから中央格子点（i, 0）の金利を 0 から α_i に変更すると時点 i における任意の格子点（i, j）の金利は jΔr から α_i＋jΔr に変更される．この様子を図 4 に示す．

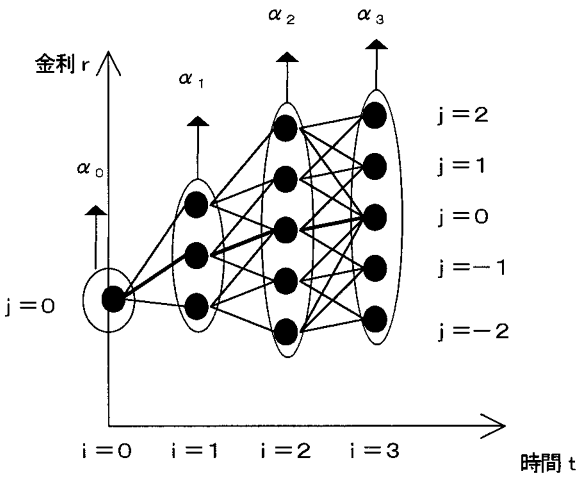


図 4　式（3-3）に対応する HW ツリー

図 4 の HW ツリーと式（3-3）が対応するためには，$[\phi(i)-a\alpha_i]\Delta t=\alpha_{i+1}-\alpha_i$ が成立すればよい．上式の左辺は式（3-3）での Δt 時間における金利変化の期待値であり，右辺は図 4 における中央格子点（i, 0）から中央格子点（i+1, 0）へ移る場合の金利変化である．したがって ϕ(i)と α_i には次の関係式が成立する．

$$\phi(i)=\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\Delta t}+a\alpha_i \qquad (3\text{-}12)$$

したがって式（3-3）の ϕ(i)の代わりに α_i がわかれば十分である．Hull & White は α_i をシフト関数と命名した．図 4 を見ると，時点 i 毎に格子点金利を α_i だけ上方にシフトしていることがわかる．平均回帰パラメータ a と短期金利ボラティリティ σ が定数のときには推移確率（式（3-8)～(3-10)）はシフト関数の影響を受けないことが証明されているので，図 2 の HW ツリーで求めた推移確率が図 4 の HW ツリーにそのまま適用できる．

Hull & White は α_i を国債イールドカーブから求めることを提唱している．国債イ

ールドカーブは図 5 のような金利曲線のことで，長期国債の時価から毎営業日毎に推定される．

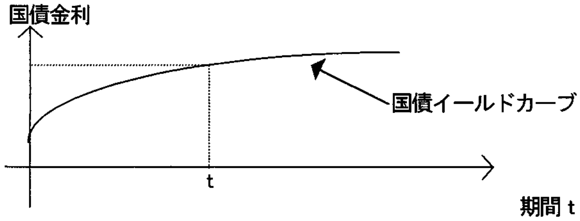


図 5　国債イールドカーブ

イールドカーブで表される金利は次の様な特徴を持つ．

・基準日（時価観測日）から任意の期間 t（単位：年）までの金利を表す．

・この金利は中間利払いがないという意味でイールド，ゼロクーポンレート（割引債金利）あるいは単にゼロレートと呼ばれる．

・国債は国の発行する債券なので安全資産として扱われる．ゼロレートは安全資産利子率（非危険利子率）として扱われる．

・イールドカーブは，様々な残存期間を持つ国債の時価を説明するように決定される．

・ゼロレートの単位は実数（%の 1/100）で，複利期間は半年複利，1 年複利，連続複利等どれでもかまわないが，金融派生商品の価格を求める場合には連続複利[*7]が採用されることが多い．元本 1 円を連続複利金利 z で t 期間運用したときの元利合計は exp(zt) となる．逆に，連続複利金利 z で t 期間運用したときの元利合計が 1 円となるための元本は exp(−zt) となる．

イールドカーブから求められるゼロレート z と HW モデルの短期金利 r の相違点に注意が必要である．ゼロレート z は図 5 に示されているように時点 0 から任意の時点 t までの金利であり，HW モデルの短期金利 r は $i\Delta t$ から $(i+1)\Delta t$ までの金利である．

連続複利金利ベースの国債イールドカーブが作成済みとして，満期 $i\Delta t$ で 1 円が償還される割引債の 0 時点（現在）の理論価格を P(i) で表す．P(i) は $i\Delta t$ 期間後の 1 円の現在価値でもある．イールドカーブから求めた時点 $i\Delta t$ までのゼロレートを z(i) とすれば

$$P(i) = e^{-z(i)i\Delta t} \tag{3-13}$$

で計算される．HW モデルのシフト関数 α_i は，満期 $i\Delta t$，償還金額 1 円の割引債の理論価格を図 4 の HW ツリーから求めたとき P(i) になるように求められる．つまり，割引債価格を国債イールドカーブから求めても HW ツリーから求めても一致するように α_i を求める．この意味で HW モデルは国債イールドカーブと整合性を持つ．シフト関数 α_i の計算式をまとめると次の様になる．

・r_{ij}：格子点（i，j）での金利

・Q_{ij}：格子点（i，j）で償還される 1 円の現在価値

・p(k, j)：格子点（i, k）から格子点（i+1, j）への推移確率
・P(i)：時点 $i\Delta t$ を満期に持つ額面１円の割引債価格

初期値　$r_{00}=\alpha_0=-\dfrac{\log P(1)}{\Delta t}$　$Q_{00}=1$　(3-14)

$$Q_{i+1,j}=\sum_k Q_{ik}p(k,j)\exp[-(\alpha_i+j\Delta r)\Delta t] \quad (3\text{-}15)$$

$$\alpha_{i+1}=\frac{\log\{\sum_j Q_{i+1,j}\exp[-j\Delta r\Delta t]\}-\log P(i+2)}{\Delta t} \quad (3\text{-}16)$$

ただし，log：自然対数　exp［　］：自然対数の底 e のベキ乗

式（3-14）により，格子点（0, 0）での金利 $r_{00}=\alpha_0$ 及び格子点（0, 0）での１円の現在価値が１円として求められる．次に式（3-15）により，1 Δt 時点での３個の格子点(1, −1), (1, 0), (1, 1)それぞれに対応する Q(1, −1), Q(1, 0), Q(1, 1）が求められる．次に式（3-16）により，1 Δt 時点でのシフト関数 α_1 が求められる．α_1 が求まったので，式 (3-15) により 2 Δt 時点での Q(2, j) が求められ，式 (3-16）により α_2 が求められる．この手順により i=0 から始めて任意の i>0 におけるシフト関数 α_i が次々に必要なだけ求められる．この手順は i が増加する方向に進むのでフォワードインダクションと呼ばれる．

3.5　HW ツリーの利用法

図４で示される HW ツリーにおいて各格子点の推移確率及び金利が全て決定されたので，任意の CF（キャッシュフロー）の現在価値を HW ツリーを用いて計算することができる．HW ツリーでの推移確率は推移パターン A, B, C 毎に求められるので，割引計算[*8] も各パターン毎に考えると計算しやすい．例として残存期間 1.5 年，クーポンレート 3% の国債のキャッシュフローから HW ツリーを用いて現在価値を求める方法を説明する．国債 CF は図６のようになる．

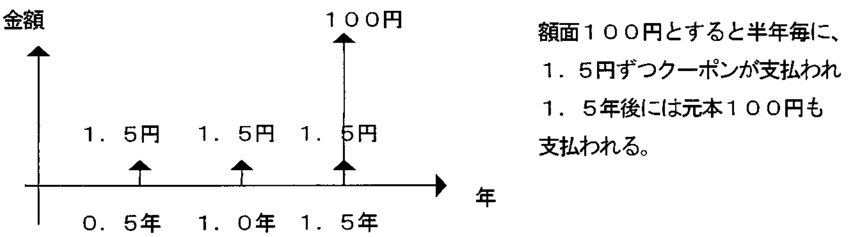


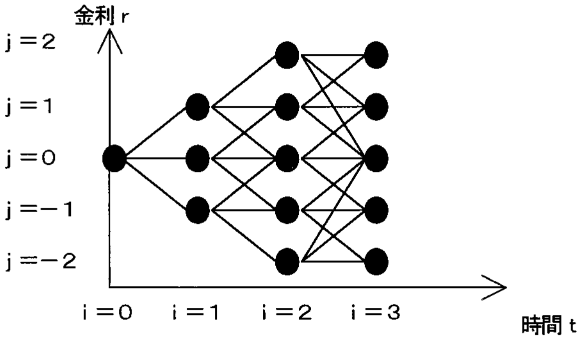
図 6　国債のキャッシュフロー

HW ツリーによる割引計算は，図４よりも図２の HW ツリーで説明する方が分かり易い．ただし，格子点金利はシフト関数込みの金利とする．時間軸の刻み幅 Δt を 0.5 年とする．a=0.3, $\sigma=0.01$ とする．$M=-a\Delta t=-0.15$．$\Delta r=\sigma(3\Delta t)^{0.5}=0.0122$．式（3-11）より Jmax の範囲は

$$-\frac{3-\sqrt{6}}{3M}=-\frac{0.184}{-0.15}=1.23$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3\,M}=-\frac{0.186}{-0.15}=5.44$$

の間の整数であるから Jmax=2 とする．HW ツリーは i=1（0.5 年）まで A パターンで推移し，i=2 から B 及び C パターンが現れる．



再掲図 2　HW ツリー

格子点 (i, j) の金利は $\alpha_i+j\Delta r$ であり，推移確率は式 (3-8)，式 (3-9)，式 (3-10) を用いる．図 2 の HW ツリーと図 6 のキャッシュフローを重ねる．i=1 の 3 点で 1.5 円が発生し，i=2 の 5 点で 1.5 円が発生し，i=3 の 5 点で 101.5 円が発生する．格子点の金利と推移確率によりキャッシュフローを割引き，(0. 0) での価値を求める．キャッシュフローの各格子点での価値計算エリアを FV(i, j) とする．最終 CF は i=3 で発生するから，格子点価値計算は i=2 から始める．(2, 2) の点から右を見ると推移パターンは C で，(3, 2)，(3, 1)，(3, 0) の点へ推移することがわかる．そこで，(3, 2)，(3, 1)，(3, 0) 各点の 101.5 円を (2, 2) へ割り引く．(2, 2) の金利は $\alpha_2+2\,\Delta r$，期間は Δt なので

FV(2, 2)=101.5＊exp(x)＊(Pu+Pm+Pd)　$x=-(\alpha_2+2\,\Delta r)*\Delta t$

Pu, Pm, Pd は式 (3-10) において j=2 として求める．

となる．(2, 1) の推移パターンは A なので，(3, 2)，(3, 1)，(3, 0) 各点の CF を割り引く．

FV(2, 1)=101.5＊exp(x)＊(Pu+Pm+Pd)　$x=-(\alpha_2+\Delta r)*\Delta t$

Pu, Pm, Pd は式 (3-8) において j=1 として求める．

同様にして

FV(2, 0)=101.5＊exp(x)＊(Pu+Pm+Pd)　$x=-\alpha_2*\Delta t$

FV(2, −1)=101.5＊exp(x)＊(Pu+Pm+Pd)　$x=-(\alpha_2-\Delta r)*\Delta t$

FV (2, −2)=101.5＊exp(x)＊(Pu+Pm+Pd)　$x=-(\alpha_2-2\,\Delta r)*\Delta t$

次に i=1 時点へ割り引く．(1, 1) から右側を見ると，A パターンで (2, 2)，(2, 1)，(2, 0) へ推移している．(2, 2) での価値：1.5 円+FV(2, 2)，(2, 1) での価値：1.5 円+FV(2, 1)，(2, 0) での価値：1.5 円+FV(2, 0) であり，(1, 1) の金利が $\alpha_1+\Delta r$ なので

FV(1, 1)=(1.5+FV(2, 2))＊Pu＊exp(x)+(1.5+FV(2, 1))＊Pm＊exp(x)+(1.5

$+FV(2, 0))*Pd*\exp(x)\quad x=-(\alpha_1+\Delta r)*\Delta t$

同様に

$FV(1, 0)=(1.5+FV(2, 1))*Pu*\exp(x)+(1.5+FV(2, 0))*Pm*\exp(x)+(1.5+FV(2, -1))*Pd*\exp(x)\quad x=-\alpha_1*\Delta t$

$FV(1, -1)=(1.5+FV(2, 0))*Pu*\exp(x)+(1.5+FV(2, -1))*Pm*\exp(x)+(1.5+FV(2, -2))*Pd*\exp(x)\quad x=-(\alpha_1-\Delta r)*\Delta t$

最後に i=0 時点へ割り引く.

$FV(0, 0)=(1.5+FV(1, 1))*Pu*\exp(x)+(1.5+FV(1, 0))*Pm*\exp(x)+(1.5+FV(1, -1))*Pd*\exp(x)\quad x=-\alpha_0*\Delta t$

FV(0, 0) が図 6 の CF の現在価値である．注意点は，格子点上の CF はその格子点の価値に入れないことである．これは利払い当日に債券を購入する場合クーポンがもらえないことに対応する．実際の利払い日が格子点に乗らない場合の割引方法に関しては 4 章で触れる.

3.6　HW モデルによるヨーロピアンオプションの評価

HW モデルを用いて債券ヨーロピアンオプションを評価する．ここでは，プレミアムの求め方を説明する．債券ヨーロピアンオプションは既に契約済みのものでも，今日（基準日）新規契約のものでも常に基準日時点のプレミアムを求める．オプションの契約内容から，原資産としての国債銘柄，想定元本，オプション満期日，行使価格，コールかプットかがわかる．銘柄属性から将来 CF が求まる．次に HW ツリーを作成する．オプション満期日が格子点に乗るように Δt を決めてパラメータ a，σ を与え，国債イールドカーブを利用すると HW ツリーでの格子点の金利 $\alpha_i+j\Delta t$，推移確率が全て決まる.

プレミアム計算の第一ステップは，原資産の CF を HW ツリーによりオプション満期日まで割り引くことである．オプション満期時点を m 年としたとき，$i\Delta t=m$ を満たす i を i_m で表すことにすれば，発生時点が m より大きい全ての CF を格子点(i_m, j) まで割り引くことでオプション満期日時点の国債価値 $FV(i_m, j)$ が求まる.

オプション満期日時点のオプションの損益はオプションの買い手から見て

コールの場合：MAX{(FV(i_m, j)－経過利息)－行使価格[*9], 0}

プットの場合：MAX{行使価格－(FV(i_m, j)－経過利息), 0}

となる．経過利息はオプション満期日から見た前回利払い日からオプション満期日までの期間に対応するクーポン金額である.

ヨーロピアンオプションのプレミアムはオプション満期時点の損益を 0 時点まで割り引くことで求められる．原資産銘柄のクーポンのうち，オプション満期日までのものはプレミアム計算には不要である.

3.7　HW モデルによる債券アメリカンオプションの評価

アメリカンオプションは権利行使が基準日からオプション満期日までのどの時点でも許されている．HW モデルではアメリカンオプションのプレミアムを次の様にして求める.

1)　オプション満期日での原資産価値 FV（i_m, j）をヨーロピアンオプションの場合と同様に求める.

2） オプション満期日時点でのアメリカンオプション価値を格子点ごとに AM(i_m, j）で表す．

コールの場合：AM(i_m, j)＝MAX{(FV(i_m, j)－経過利息)－行使価格, 0}

プットの場合：AM(i_m, j)＝MAX{行使価格－(FV(i_m, j) －経過利息), 0}

とする．AM（i_m, j）はオプション満期時点でのペイオフを表す．

3） オプション満期日の1時点前で，FV(i_m－1, j)，AM（i_m－1, j）を再計算する．FV に関しては，FV(i_m, j）＋「(i_m－1, i_m］期間中の CF」を i_m－1 時点まで割り引く．AM に関しては AM(i_m, j）を i_m－1 時点まで割り引く．i_m－1 時点で

コールの場合：AM(i_m－1, j)＝MAX{AM(i_m－1, j)，(FV(i_m－1, j)－経過利息)－行使価格}

プットの場合：AM(i_m－1, j)＝MAX{AM(i_m－1, j), 行使価格－(FV(i_m－1, j)－経過利息)}

を計算する．右辺の AM(i_m－1, j）は i_m 時点で権利行使した場合の i_m－1 時点でのオプション価値であり，損益は i_m－1 時点で権利行使した場合の i_m－1 時点での価値である．権利行使はできるだけ有利な状態で実行されると考えて，この二つの価値の大きい方を i_m－1 時点でのオプション価値にする．

4） 上記 3）で述べた手順を i_m－1 時点から 0 時点まで繰り返すことにより求められる．AM(0, 0）がアメリカンオプションのプレミアムとなる．アメリカンオプションでは $0 \leqq i \leqq i_m$ を満たす全ての格子点（i, j）で FV(i, j）と AM(i, j）の両方を求めなければならない．

アメリカンオプション評価の場合には，ヨーロピアンオプションの場合と異なり，基準日からオプション満期日までの全ての CF が計算対象になる．

4. HW モデルの改善

4.1 HW モデルでの問題点

3 章で述べた単純な HW モデルでは実務上次の様な問題点が発生する．

1） 格子点上の短期金利が負になる可能性がある．特に現在のような低金利局面ではモデル上の短期金利は必ず負になる．

2） 時間軸の刻み幅 Δt の調整が困難．債券オプションの場合には原債券の残存期間が 7 年～10 年であるのに対し，オプション期間は数日～数ヶ月である．このアンバランスな状態を 1 種類の Δt でどのように調整すべきか．

3） 債券アメリカンオプションでも債券ヨーロピアンオプションでも債券 CF の実際の発生時点が HW ツリーの格子点の時間座標 $i\Delta t$ と一致しないことが多い．$i\Delta t$ と（i＋1)Δt の間に発生する CF の割り引き方法を誤ると，HW モデルによる債券の現在価値計算や債券オプションプレミアム計算誤差が発生する．

4） HW モデルのパラメータ a と σ をどのようにして最適化するか．HW モデルにおいてはこの問題が最も重要である．

この章では，上記問題点の改善策を提案する．

4.2　短期金利が負になることの対策

「短期金利が正規分布に従う」と言う条件を「短期金利が対数正規分布に従う」という条件に変更する．短期金利の対数正規分布を仮定したモデルは Black & Karasinski（以降では BK モデルと略記する）モデルとして知られている．BK モデルでの確率微分方程式は

$$df(r)=[\phi-af(r)]\,dt+\sigma dB \tag{4-1}$$

f は金利 r の関数

である．HW モデルの式（3-1）と比較すると，df(r) と dr の違いがある．f(r)=log(r) とすれば log(r) が正規分布に従うので短期金利 r は対数正規分布に従う．HW モデルから BK モデルへの変換は容易である．式（4-1）において x=f(r) とおくと

$$dx=(\phi-ax)dt+\sigma dB$$

となり，式 (3-1) と全く同じとなる．従って，推移確率に関しては HW モデルと BK モデルで同じ結果が得られる．シフト関数 α_i に関しては式（3-14)～(3-16）が次の様に変形される．

$$\text{初期値}\quad r_{00}=\alpha_0=\log\left(-\frac{\log P(1)}{\Delta t}\right)\quad Q_{00}=1 \tag{4-2}$$

$$Q_{i+1,j}=\sum_k Q_{ik}p(k,\ j)\exp[-\exp(\alpha_i+j\Delta r)\Delta t] \tag{4-3}$$

$$P(i+2)=\sum_j Q_{i+1,j}\exp[-\exp(\alpha_{i+1}+j\Delta r)\Delta t] \tag{4-4}$$

式（4-4）はシフト関数 α_{i+1} に関して非線形なので，ニュートン法により求める．元本 1 円を Δt 期間用した場合の元利合計は

HW モデル：$\exp(r_{ij}\Delta t)$

BK モデル：$\exp(\exp(r_{ij})\Delta t)$

となる．BK モデルでは r_{ij} そのものは負になるが短期金利としての $\exp(r_{ij})$ が負になることはない．

4.3　Δt の調整法

全期間を 1 種類の Δt で刻もうとすると取引に合わせて Δt を調整することは困難である．参考文献[1][3]で紹介されているように Δt を 2 種類使用することで実際のオプションを BK モデルにうまく乗せることができる．図 7 が Δt を 2 種類使用した場合の BK ツリー例である（イールドカーブと整合性を持たせる前の状態)．ツリーが $\Delta t\,1$ 適用区間と $\Delta t\,2$ 適用区間に分かれている．$\Delta t\,1$ 適用区間の場合には金利変化幅は $\Delta r\,1$，$\Delta t\,2$ 適用区間の場合には $\Delta r\,2$ である．

$\Delta r\,1=\sigma(3\,\Delta t\,1)^{0.5}$，$\Delta r\,2=\sigma(3\,\Delta t\,2)^{0.5}$

接続時点を i_m で表すことにすると実際の時点は $i_m\Delta t\,1$ である．i_m+1 時点は $i_m\Delta t\,1+\Delta t\,2$ に対応する．

ここで，2 種類の時間刻み幅を採用することの利点を定性的に述べておく．

- 格子モデルを使って原債券の現在価値を求める場合，$\Delta t\,1$，$\Delta t\,2$ をどのように決めても BK モデルで求めた現在価値とイールドカーブから求めた現在価値が同じになるようにイールドカーブフィッティングで調整できる．現在価値を求めるだけなら時間刻みは粗い方が楽である．

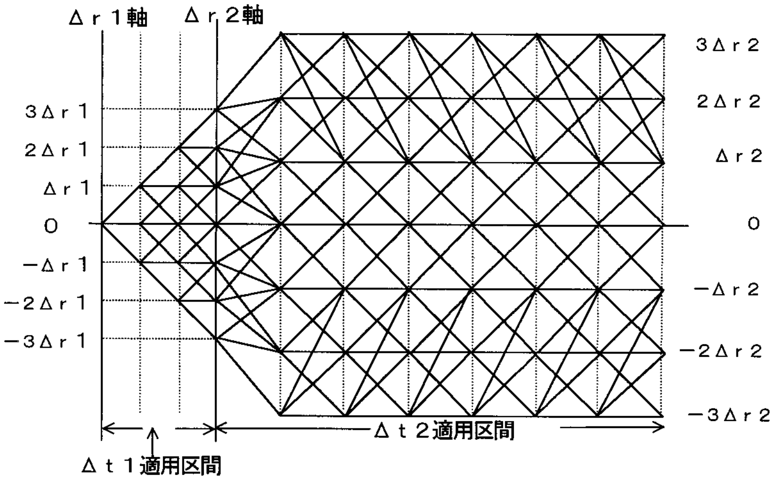


図 7　Δtが 2 種類の場合の BK ツリー

・格子モデルでアメリカンオプションプレミアムを求める場合には，時点 0 からオプション満期時点までの時間刻みはできるだけ細かい方が近似精度が高くなる．理由はアメリカンオプションでは権利行使が満期時点まで毎日可能なためである．

・上記の二つの観点から総合的に判断すると，アメリカンオプションを評価するためには時点 0 からオプション満期時点までの時間刻み幅 Δt 1 はできるだけ細かく刻み，オプション満期から原債権の償還日までの時間刻み幅 Δt 2 はできるだけ粗く刻む方が計算精度，計算時間の面から有利である．

Δt 1 適用区間と Δt 2 適用区間の接続法は次の通り．

1）　パラメータ a，σ は両区間で共通に使用する．

2）　i_m 時点から i_m＋1 時点への推移パターンが A パターンとなるようにする．式(3-11）を満足する j には範囲があるので，これをうまく利用する．

3）　i_m 時点での格子点（i_m，j）の金利は jΔr 1 であり，i_m＋1 時点での格子点（i_m＋1，k）の金利は kΔr 2 である．（i_m，j）の各点で，jΔr 1 に最も近い kΔr 2 を見つけて，j→k を対応させる．A パターンなので，j から k+1，k，k−1 に推移させる．このように接続すれば推移確率が負になることはない．jΔr 1　kΔr 2 と考えると推移確率の計算式（3-8）で k を代入して近似的に使用できる．

期間全体を Δt 1 で刻めばこのような工夫は不要であるが膨大な計算時間を覚悟しなければならない．BK モデルでの計算時間は格子点数に影響されると思われるので，計算時間を比較するため

A : Δt＝1/365 で期間全体を刻む場合

B : Δt 1＝1/365，Δt 2＝30/365 で刻む場合

の格子点数をそれぞれ概算してみる．原債券の残存期間を 9 年，オプション満期まで 30 日と仮定し，a＝0.1 とする．A の場合，時間軸の格子数は 365 日＊9 年＝3285．M ＝−aΔt＝−0.1/365＝−0.000273972．式（3-11）より Jmax の下限は

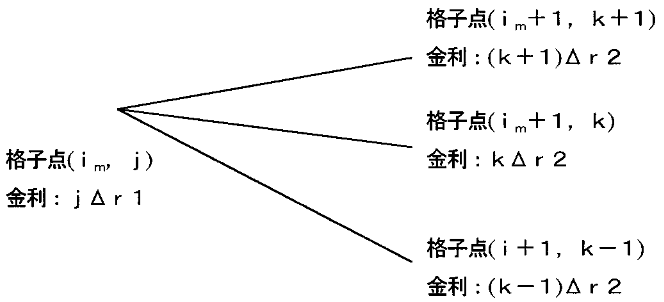


図 8　i_m 時点での A パターンによる接続

$$-\frac{3-\sqrt{6}}{3\,\mathrm{M}}=\frac{0.184}{0.000273972}=671.6$$

となるので Jmax＝672 とすると，総格子点数は（672＊2＋1)＊9＊365 から約 440 万点となる．B の場合，時間軸の格子数は 30＋（9＊365/30)＝140．M＝－aΔt 2＝－0.1＊30/365＝－0.00821918．Jmax の下限は

$$-\frac{3-\sqrt{6}}{3\,\mathrm{M}}=\frac{0.184}{0.00821918}=22.39$$

となるので Jmax＝23 とすると，格子点総数は（23＊2＋1)＊140 から約 6580 点となる．B に比べて A は約 670 倍の計算時間（及びメモリ）がかかる．計算時間では B の方が圧倒的に有利であるが計算精度はどうであろうか？．図 9 及び図 10 は B の方法で BK モデルを作成し原債券の現在価値を計算しグラフ化したものである．イールドカーブから直接計算した現在価値は 104.803 円． 図 9 はオプション満期まで 14 日，図 10 はオプション満期まで 30 日の場合である．σ＝0.1，0.2，0.3，0.4，0.5 のそれぞれに対し a を 0.01 から 0.01 刻みで 1.0 まで 100 回変化させた．正解値 104.803 に対し，図 9，図 10 共に誤差は 0.1 銭の間に収まっている．グラフの後半部分が乱れているのは a が大きくなるに従って Δt 2 の値が変化することにより，利払い日が格子点からはずれる度合いによる．この点に関する改善は次節で検討する．全期間を 1/365 で刻むと全てのクーポン支払日が格子点に乗るので BK モデルによる現在価値も 104.803 となる．計算精度の観点からも B の方法で実用的であると考えている．オプションの原資産である債券の現在価値は本質的に BK モデルのパラメータ a，σ 及び Δt の取り方に依存しない．この理由は与えられた 1 種類の Δt あるいは 2 種類の Δt 1，Δt 2 に対して，債券イールドカーブと整合性のあるシフト関数を求めることが可能であることにある．しかし，オプションプレミアム計算では，時点 0 からオプション満期に対応する i_m 時点までの各点でペイオフを計算するが, このペイオフはパラメータ a，σ 及び時間刻みの影響を受ける．図 9，10 により BK モデルの精度は十分実用的である．

4.4　格子点に乗らないキャッシュフローの処理方法

国債の利払い日は原則利払い月の 20 日がであるが，20 日が休日だと翌営業日にずれる．従って，利払い時点が iΔt と（i＋1)Δt の間になるのはよくあることである．

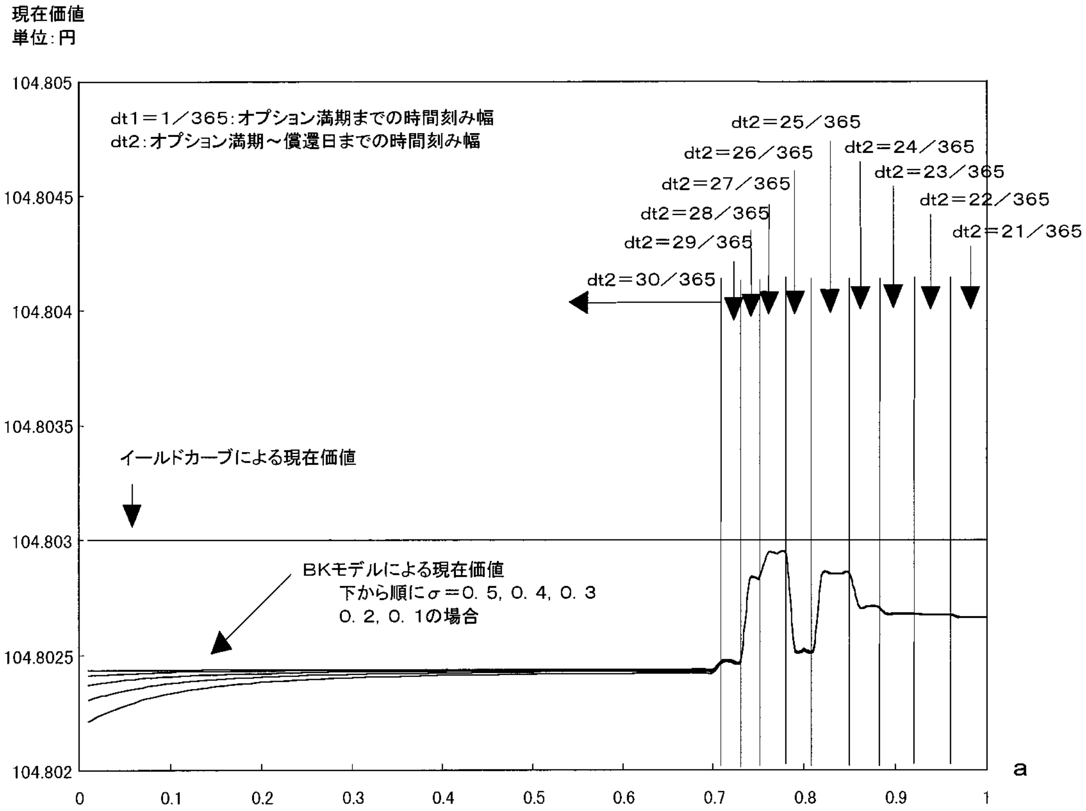


図 9　BK モデルによる指標銘柄の現在価値（オプション満期 14 日の場合）

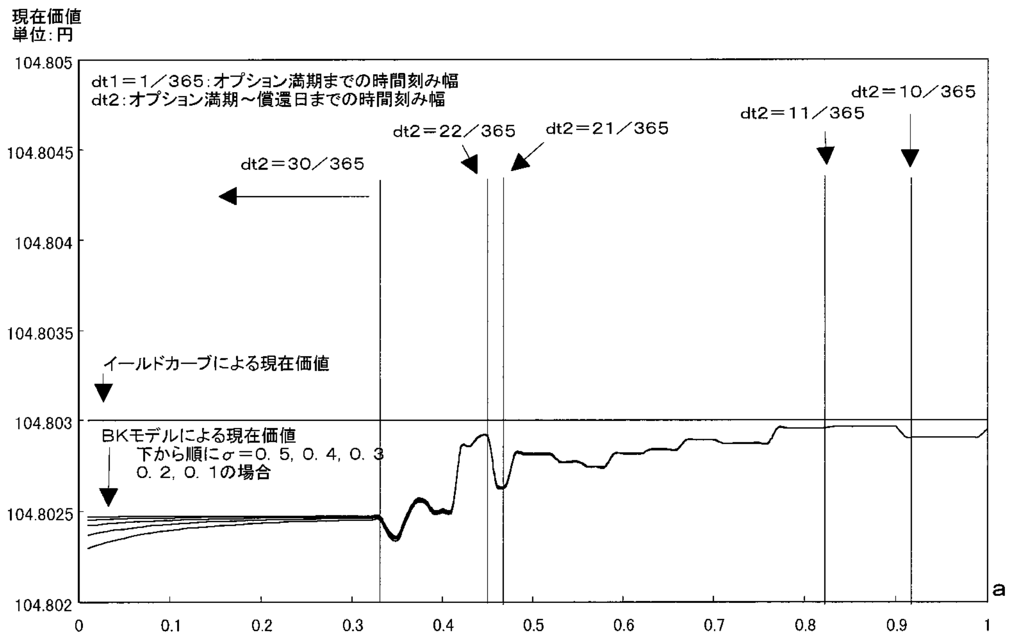


図 10　BK モデルによる指標銘柄の現在価値（オプション満期 30 日の場合）

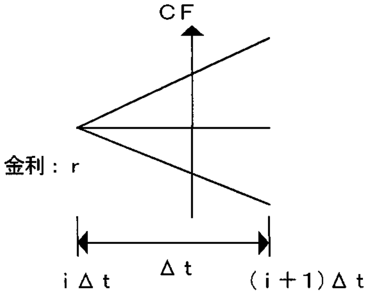


図 11　格子点に乗らない CF

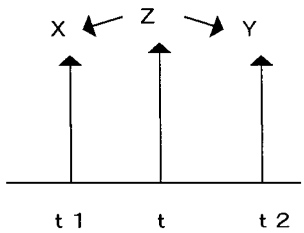


図 12　バケッティング

図 11 のように $i\Delta t$ と $(i+1)\Delta t$ にある CF を左側の格子点まで割り引くとき，適切な割引金利が不明である．左側の格子点金利は適用期間が Δt であり，この CF を割り引く金利は格子点の金利ではない．CF の発生時点を t として，最も安易な割引方法は BK モデルで

$$\mathrm{CF}\cdot\exp(-\exp(r)(t-i\Delta t))$$

とする方法である．これで問題ないと考えていたが同一 CF の現在価値をイールドカーブから求めた場合と BK モデルから求めた場合の誤差（図 9，10 参照）の原因はこの計算方法にある．ここで提案する方法は，このような CF に対して，現在価値が変わらないように $i\Delta t$ 時点と $(i+1)\Delta t$ 時点に分解する方法である．一つの CF を二つの CF に分ける方法を一般にはバケッティングと呼ぶ．

図 12 のように，t 時点で発生した金額 Z を t 1 時点の X と t 2 時点の Y に分解する．X，Y が未知数なので二つの条件が必要である．現在価値を求めるので

条件 1 : Z の現在価値＝X の現在価値＋Y の現在価値

条件 2 : Z の金利感応度＝X の金利感応度＋Y の金利感応度

金利感応度：現在価値を金利（ゼロレート）で微分した値.

とする．イールドカーブから t 1，t，t 2 に対応するゼロレート z 1，z，z 2 を求めると

条件 1 : $Z\exp(-zt)=X\exp(-z_1t_1)+Y\exp(-z_2t_2)$

条件 2：$-tZ\exp(-rz)=-t_1X\exp(-z_1t_1)-t_2Y\exp(-z_2t_2)$

これを解いて

$$X=(t-t_1)/(t_2-t_1)*Z\exp(z_1t_1-zt)$$

$$Y=(t_2-t)/(t_2-t_1)*Z\exp(z_2t_2-zt)$$

が得られる．この結果を図 11 に適用する．X に対応する金額をそのまま格子点価値に加算し，Y に対応する金額を格子点金利で割り引いて格子点価値に加算する．この改善を BK モデルに追加して図 9，図 10 を再計算したところ，パラメータ a，σ の値に関係なくイールドカーブからの現在価値と BK モデルからの現在価値は一致した．これにより BK モデルの計算精度は十分である．

4.5　パラメータ a，σ の最適化

前節で述べたように，債券の現在価値を BK モデルで求めるとパラメータ a，σ にどのような値を与えても同じ値が得られる．しかしオプションプレミアムは，a，σ

の影響を受ける．従って a，σ は市場の観測プレミアムに合うように求めることになる．HW モデルの場合には，ヨーロピアンオプションのプレミアム計算公式が知られているので，この公式を使ってパラメータの最適化をするべきであろう．本稿で適用しようとしているのは BK モデルなので BK ツリーを用いて最適化を試みた．観測プレミアムは表 2 の通りである．

再掲表 2　債券オプション例（アメリカン，ATM）（日経金融新聞より）

オプションタイプ別プレミアム	オプション満期日：2 W	オプション満期日：1 M
コール・プレミアム（額面 100 円当たり）	0.31～0.39 円	0.45～0.55 円
プット・プレミアム（額面 100 円当たり）	0.40～0.48 円	0.65～0.75 円

原資産：182 回債．時価：104.51 円

観測プレミアムとして上記 4 種類の中央値を採用した．

観測プレミアムと計算プレミアムの差を評価する関数を定義する．一般的には

$$f(a,\ \sigma)=\sum_{i=1}^{n}[pc_i(a,\ \sigma)-po_i]^2$$

$$g(a,\ \sigma)=\max_{i=1}^{n}|pc_i(a,\ \sigma)-po_i|$$

ただし，$pc_i(a,\ \sigma)$：a，σ を与えたときの BK モデルによる計算プレミアム

po_i：観測プレミアム

n：同時にフィッティングするオプション数

i：i 番目のオプション

等が考えられる．f は差の 2 乗和であり，g は差の絶対値の最大値である．どちらを使ってもほぼ同じ結果が得られるが，g の場合は単位が円そのものでわかり易いので g を用いた．

オプション満期毎にパラメータを最適化することにする．オプション満期 2 W，1 M 毎に call，put を同時にフィッティグする．オプション満期毎に異なるパラメータの組（a，σ）が求まることになる．評価関数 g(a，σ）の最小値を与える a，σ を求めるのは 2 次元の最小値問題となる．2 次元最小値問題の解法を検討するために，g(a，σ）の分布を調べてみた．a，σ をそれぞれ 0.05 から 0.05 刻みに 20 回変化させたときの合計 400 ポイントで g(a，σ）を計算しグラフ化したのが図 13 である．オプション期間は 1 M．図 13 を見ると谷底が対角線方向に走っている．これらが最小値の候補である．最小値の候補は［0，1］の矩形全域に広がっている．機械的に最小値を求めようとすると，a，σ が安定的に求められる可能性は少ないと思われる．イールドカーブの微少変化，観測プレミアムの微少変化により a，σ が大きく振れることが予想される．リスク管理特に VaR を求める場合には a，σ の安定性は重要である．図 9，図 10，図 13 を総合的に考えて［0.05，0.3］の矩形の中で最適な a，σ を探索することにした．パラメータ最適化の戦略は実務での目的及び評価関数の分布に応じて策定すべきであろう．

2 次元最小値問題の解法はいろいろあるが，図 13 の状況から考えてメッシュ探索

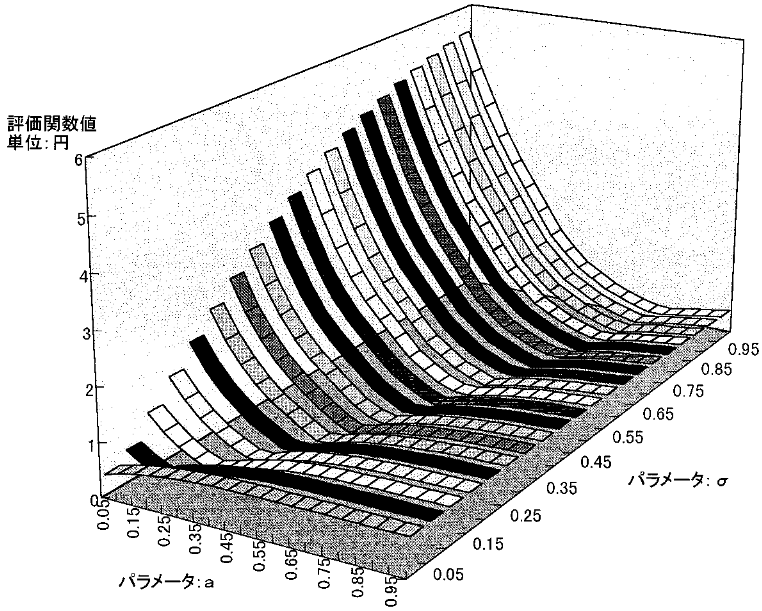


図 13　評価関数の分布

法を採用することにした．最初は探索領域にメッシュをやや粗く設定し，メッシュの交点での g(a，σ) を計算して最小値を見つける．次に，最小値を与える a と σ を中心としてメッシュを細かくして最小値を探索する．この手順を何回か繰り返す．探索するメッシュ交点数が多くなりすぎないような工夫が必要である．

表 3 に最適化の結果がまとめてある．表 3 には比較のために BS モデルによる結果も載せてある．パラメータの最適化は観測プレミアムが与えられているオプション期間 14 日と 30 日で実行した．プレミアムの他にデルタ，ガンマ，ベガ*10 も計算してある．プレミアムに関しては表 1 の観測プレミアムの範囲に収まっている．ヨーロピアンで BS の結果と比較するとプレミアム，デルタ，ガンマの値がほとんど同じである．ヨーロピアンオプションで call と put のデルタの絶対値の合計が 1 になること，call と put のガンマが等しいことが成立している．putcall パリティもかなりの精度で成立している．ベガ値が大きく異なっているが，ボラティリティが BS モデルでは原資産の価格ボラティリティであるのに対し，BK モデルでは金利のイールドボラティリティであることのためと考えている．さらに，オプション期間を 18 日，22 日，26 日に設定し，14 日と 30 日のパラメータを日数案分で補間してプレミアムを計算してみた．この場合でも BS モデルと BK モデルの結果はかなり一致しており，パラメータ補間も OK と考えられる．

この例ではアメリカン put とヨーロピアン put の結果が全く同一であるが，これは put オプションで期前行使のチャンスがなく満期までオプションを保持するのが有利であることを意味する．これを確認するために，図 14 のグラフを作成した．図 14 ではオプション期間中の 1 日刻みごとに，原債券の理論価格，経過利息，理論価格－経過利息（クリーンプライス），行使価格を表示してある．行使価格とクリーンプラ

表 3　パラメータ最適化の結果

債券現物オプション:
原資産:182回債　　　時価:104. 51円
BSモデルとBKモデルの比較

観測値 (ｱﾒﾘｶﾝ, ATM)	ﾌﾟﾚﾐｱﾑ	満期 0.31 14日 ～ CALL 0.39	満期 0.40 14日 ～ PUT 0.48	満期 0.45 30日 ～ CALL 0.55	満期 0.65 30日 ～ PUT 0.75

上記観測ﾌﾟﾚﾐｱﾑからそれぞれﾊﾟﾗﾒｰﾀを最適化した

		満期:2W				満期:1M			
		σ 0.0485				σ 0.0495			
BSモデル		CALL		PUT		CALL		PUT	
	ﾌﾟﾚﾐｱﾑ	0.3340		0.4642		0.4797		0.7169	
	ﾃﾞﾙﾀ	0.4497		−0.5503		0.4391		−0.5609	
	ｶﾞﾝﾏ	0.3993		0.3993		0.2666		0.2666	
	ﾍﾞｶﾞ	8.0884		8.0884		11.7815		11.7815	
		a 0.26		σ 0.15		a 0.15		σ 0.1	
BKモデル		CALL		PUT		CALL		PUT	
		ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ
	ﾌﾟﾚﾐｱﾑ	0.3272	0.3330	0.4605	0.4605	0.4700	0.4868	0.7180	0.7180
	ﾃﾞﾙﾀ	0.4342	0.4456	−0.5652	−0.5652	0.4185	0.4397	−0.5808	−0.5080
	ｶﾞﾝﾏ	0.4136	0.4331	0.4136	0.4136	0.2692	0.2926	0.2693	0.2693
	ﾍﾞｶﾞ	2.5071	2.5062	2.5071	2.5071	5.7117	5.6926	5.7117	5.7117

上記2つのｵﾌﾟｼｮﾝから下記の3つのｵﾌﾟｼｮﾝをﾊﾟﾗﾒｰﾀ補間で求めた

		満期:18日				満期:22日				満期:26日			
		σ 0.04875				σ 0.049				σ 0.04925			
BSモデル		CALL		PUT		CALL		PUT		CALL		PUT	
	ﾌﾟﾚﾐｱﾑ	0.3763		0.5343		0.4147		0.5978		0.4497		0.6573	
	ﾃﾞﾙﾀ	0.4465		−0.5535		0.4444		−0.5556		0.4424		−0.5576	
	ｶﾞﾝﾏ	0.3501		0.3501		0.3149		0.3149		0.2881		0.2881	
	ﾍﾞｶﾞ	9.1591		9.1591		10.1152		10.1152		10.9851		10.9851	
		満期:18日				満期:22日				満期:26日			
		a 0.23		σ 0.138		a 0.205		σ 0.125		a 0.177		σ 0.113	
BKモデル		CALL		PUT		CALL		PUT		CALL		PUT	
		ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ	ﾖｰﾛﾋﾟｱﾝ	ｱﾒﾘｶﾝ
	ﾌﾟﾚﾐｱﾑ	0.3750	0.3833	0.5363	0.5363	0.4100	0.4210	0.5999	0.5999	0.4476	0.4613	0.6664	0.6664
	ﾃﾞﾙﾀ	0.4304	0.4441	−0.5689	−0.5689	0.4261	0.4423	−0.5731	−0.5731	0.4228	0.4413	−0.5765	−0.5765
	ｶﾞﾝﾏ	0.3551	0.3744	0.3551	0.3551	0.3189	0.3396	0.3189	0.3189	0.2881	0.3098	0.2881	0.2881
	ﾍﾞｶﾞ	3.1632	3.1567	3.1638	3.1638	3.8745	3.8670	3.8745	3.8745	4.7346	4.7227	4.7346	4.7346

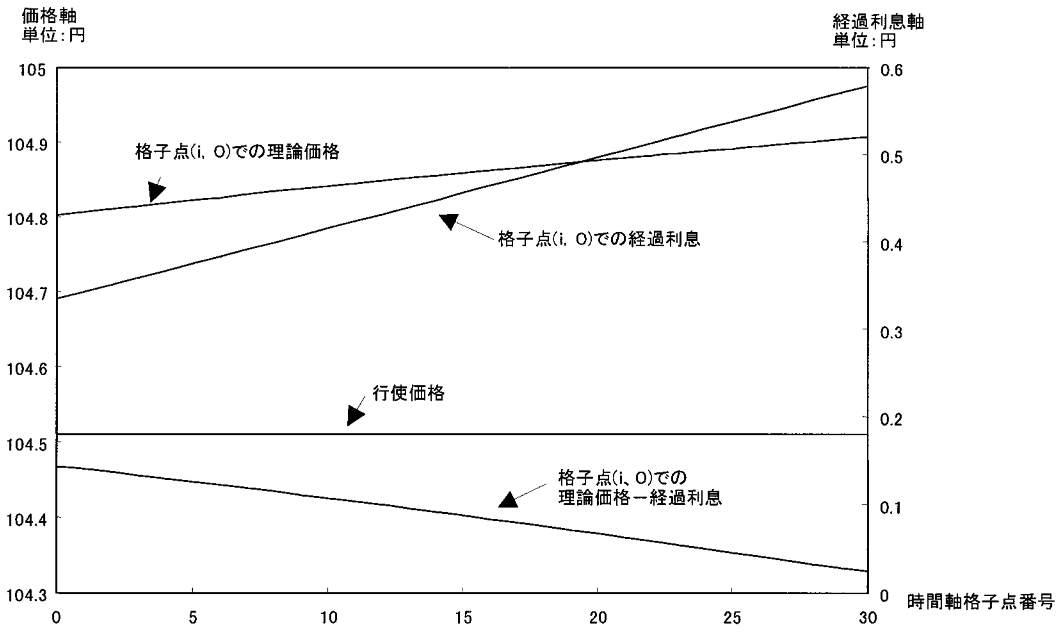


図 14　put オプションの価値

イスの差が put オプションの価値となるが，オプション満期で最大となる．従ってアメリカンとヨーロピアンの価値が一致する．これは，現時点での国債イールドカーブによるゼロレートよりも 182 回債のクーポンレートの方が高いため，時間経過による

現在金利による債券価値増分よりもクーポン減少による債券価値減少分の方が大きいので，時間経過と共に債券価値が減少することによる．

5. おわりに

以前にヨーロピアンオプションに関してはBSモデルを開発しヨーロピアンオプションの理論価格の妥当性を検証したことがある．BSモデルでのパラメータに関しても権利行使金額別，オプション期間別によるボラティティ・サーフェイスを作るとプレミアムの市場観測値と整合性のある理論値が得られることも金利リスク算出の一環として経験した．その過程でアメリカンオプションのプライシング技術が必要なことを痛感した．アメリカンオプションの評価は従来から2項モデルが利用されているが理論的な興味もありHull & Whiteモデルに挑戦した．彼らの論文をもとにプログラムを作成し実データを用いて理論価格の妥当性を検証してみた．当然ながら単純なアルゴリズムでは精度が上がらず苦労した．本稿での改善案はその時の試行錯誤での発想がベースになっているが，改善案のほとんどはHull & Whiteの論文に触れられている．しかし，改善案を実際のプログラムに取り込むにはまた別の苦労があった．

パラメータa，σの最適化に関しては今回メッシュ探索法を採用したが検討の余地はまだまだあると思う．最適化アルゴリズムの比較検討もその一つであるが，HWモデルのヨーロピアンオプション解析解を利用してa，σの最適化時間を短縮することも検討する価値があると考えている．

最後に，金利リスク算出の全般に亘ってご指導頂いた慶應義塾大学総合政策学部森平教授に謝意を表する．

＊ 1　John，Hull.，Alan，White.：共にトロント大教授．共同でHull & Whiteモデルと呼ばれる1ファクタ・スポットレート・モデルを発表した．

＊ 2　Heath，D.，Jarrow，R.，Morton，A.：3人の頭文字からHJMモデルと呼ばれるnファクタ・フォワードレート・モデルを発表した．

＊ 3　金利の平均回帰性：金利がある一定の範囲内で変動する性質のこと．

＊ 4　1個のキャッシュフローを二つのキャッシュフローに分解する方法．

＊ 5　イールドカーブ：債券の理論価格を導く金利．この金利は一般に曲線で表されるのでイールドカーブと呼ばれる．詳細は3.4節の図5を参照のこと．

＊ 6　金利のボラティリティ：金利を一定サイクル例えば日時で観測する．ある営業日の金利をr_i，翌営業日の金利をr_{i+1}とする．$(r_{i+1}-r_i)/r_i$を金利の日時収益率と呼ぶ．金利の日時収益率が正規分布に従っていると仮定し，その標準偏差を求めて年率換算したものを金利のボラティリティと呼ぶ．ボラティリティは金利だけでなく金融商品の価格に対しても同様に定義される．

＊ 7　連続複利金利：1円を複利期間m年の複利金利zでt年運用したときの元利合計は$(1+zm)^{t/m}$となる．この式において$m\to 0$とすると指数関数$\exp(zt)$に収束する．複利期間が無限小の複利金利を連続複利金利と呼ぶ．

＊ 8　割引計算：HWツリーにおいて，格子点（i+1，j）における1円の，格子点（i，j）での価値は$\exp(-(\alpha_i+j\Delta r)\Delta t)\cdot p(j, j)$となる．ここに，$\alpha_i+j\Delta r$は格子点（i，j）の金利，p(j，j）は格子点（i，j）から格子点（i+1，j）への推移確率である．この計算を割引計算とよび，格子点での価値を求める行為を「割引く」と表現する．

＊ 9　行使価格：時価に対応する行使価格を想定した．この場合は理論価値－経過利息と行使価格からペイオフを計算する．

＊10　デルタ，ガンマ，ベガ：オプションの価格変動リスク指標．デルタ，ガンマは，オプション価格変動を原資産価格変動の多項式近似したときの1次，2次成分．ベガは原資産価格のボラティリティ変化がオプション価格に及ぼす影響力を表す．

参考文献

［1］ John Hull, Alan White. “ One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities ” JORNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS VOL. 28, NO. 2, JUNE 1993.
［2］ John Hull, Alan White. “ Numerical Procedures for Imprimenting Term Structure Models I : Single Factor Models ” THE JOUNAL OF DERIVATIVES FALL 1994.
［3］ John Hull, Alan White. “ Using Hull-White Interest Rate Trees ” THE JOUNAL OF DERIVATIVES SPRING 1996.
［4］ 木島正明他著, ファイナンス工学入門第 III 部, 日科技連.
［5］ 日本債券信用銀行, 商品開発グループ著, Excel でわかるハル・ホワイト・モデル, 金融財政事情研究会.

執筆者紹介

小　川　正　夫（Masao Ogawa）

1950 年生．1972 年早稲田大学理工学部数学科卒業．同年日本ユニシス(株)入社．応用ソフトウェア部で，統計解析，特に多変量解析の分野に従事．1986 年頃，資産負債総合管理システム（ALM）開発プロジェクトに参画し，収益シミュレーションを開発した．1995 年市場リスク管理システム MaRCS 開発プロジェクトに参画．現在，ビジネスソリューション四部開発二室所属．